ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2025, № 1, с. 51–58

КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6; 517.926.4

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ГРАНИЦ ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТЕПЕНЕЙ В РЕШЕНИЯХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Абрамов[a],*, А. А. Рябенко[a],**

[a]Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” РАН
119333 Москва, ул. Вавилова, 40, Россия
*E-mail: sergeyabramov@mail.ru
**E-mail: anna.ryabenko@gmail.com

Поступила в редакцию 01.07.2024 г.
После доработки 01.08.2024 г.
Принята к публикации 22.09.2024 г.

Обсуждается некоторый общий подход к нахождению определяющих полиномов для дифференциальных, разностных и q-разностных операторов. Рассматривается структура такого полинома, соответствующего произведению операторов.

Ключевые слова: определяющие полиномы, линейные обыкновенные дифференциальные уравнения, разностные уравнения, полиномиальные решения, лорановы решения, компьютерная алгебра

DOI: 10.31857/S0132347425010066, **EDN**: DXFWOP

1. ВВЕДЕНИЕ

Корни определяющих полиномов линейных обыкновенных дифференциальных, разностных, q-разностных операторов (уравнений) дают важные сведения о решениях самих этих операторов. Это и валюация лоранова решения, т. е. младшая степень x, входящая в ряд с ненулевым коэффициентом, и степень полиномиального решения, и т. д. Совокупность корней должным образом выбранного определяющего полинома дает конечное число кандидатов на соответствующую роль.

Мы берем наиболее распространенные случаи такого рода операторов — дифференциальный, разностный и q-разностный, показываем, что они могут рассматриваться с единой точки зрения и предлагаем единый подход к получению определяющего полинома. Это достигается включением в класс рассматриваемых объектов так называемых индуцированных рекуррентных операторов, прямое назначение которых — построение последовательности коэффициентов рядов, являющихся решениями или компонентами решений исходных дифференциальных, разностных или q-разностных уравнений. Обнаруживается, что помимо этого единого подхода к получению определяющего полинома, привлечение индуцированных операторов открывает возможность доказательства различных свойств определяющих полиномов.

Статья построена следующим образом.

В разделе 2 даются некоторые сведения об обсуждении в литературе возможностей использования определяющих полиномов. Раздел 3 посвящен индуцированным операторам, здесь же обсуждается возможность использования индуцированных операторов для получения определяющих полиномов. Сами определяющие полиномы, получаемые этим подходом, описываются теоремой 1 в разделе 4.

В разделе 5 обсуждается одно из возможных применений рассматриваемого подхода к построению определяющих полиномов в доказательстве свойств таких полиномов. Как пример, приводится доказательство некоторого мультипликативного свойства определяющих полиномов. Для дифференциального случая это свойство ранее было установлено в [1]. В настоящей статье доказывается теорема 2, охватывающая три случая — дифференциальный, разностный и q-разностный.

В статье используются некоторые стандартные обозначения: $K[x]$ — кольцо полиномов, $K[[x]]$ — кольцо формальных степенных рядов и $K((x))$ — поле или кольцо формальных лорановых рядов от x над заданным полем (или кольцом) K. Еще о терминологии: в литературе устоявшимся термином служит “определяющее уравнение”, и само такое уравнение имеет вид $f(n) = 0$, где f — полином над некоторым кольцом или полем. Применительно к f мы используем термин “определяющий полином”.

2. ОБ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЯХ В ТОЧКАХ 0 И ∞

2.1. Точка 0

Для линейного обыкновенного дифференциального оператора L, для которого по принятой классификации точка 0 — регулярная особая ([2, гл. IV, §2]), метод Фробениуса ([2, гл. IV, §8], [3, разд. 5.3.3]) позволяет построить полином f и описать алгоритмически все такие имеющие ненулевые свободные члены степенные ряды $g(x)$, что при любой постоянной λ выполняется

$$L\left(x^{\lambda}g(x)\right) = f(\lambda)x^{\lambda}.$$

Это, в частности, позволяет находить все решения вида

$$x^{\lambda}g(x), \tag{1}$$

в них значения λ удовлетворяют определяющему уравнению $f(\lambda) = 0$.

Для $L(y) = 0$ *лорановыми* (в том числе *формальными лорановыми*) называются решения в виде ряда $\sum_{n=\lambda}^{\infty} c_n x^n \in K((x))$, $\lambda \in \mathbb{Z}$, $c_\lambda \neq 0$. Здесь λ называется *валюацией* лоранова решения. Лорановы решения являются частным случаем решений вида (1), для их построения используется то же определяющее уравнение $f(\lambda) = 0$, что и в случае (1): если дифференциальное уравнение имеет лораново решение с валюацией λ, то λ является корнем определяющего уравнения. Таким образом, множество всех целых корней определяющего уравнения включает в себя множество валюаций всех лорановых решений дифференциального уравнения.

2.2. Точка ∞

В [4] рассмотрена задача поиска полиномиальных решений уравнения $L(y) = 0$, где L — линейный дифференциальный или разностный оператор с полиномиальными коэффициентами. То есть L имеет вид

$$a_d(x)D^d + \cdots + a_1(x)D + a_0(x) \tag{2}$$

или

$$a_d(x)\Delta^d + \cdots + a_1(x)\Delta + a_0(x), \tag{3}$$

где для некоторого поля K характеристики 0 имеем $a_0(x), \ldots, a_d(x) \in K[x]$, $a_d(x) \neq 0$, $D = \frac{d}{dx}$, $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$. Для решения этой задачи вводится целая величина m и ненулевой полином $I(n)$ такие, что применение оператора L к полиному $s(x)$ степени $\deg s(x)$ дает полином $L(s)$, для которого

$$\deg L(s) \leqslant \deg s(x) + m. \tag{4}$$

Здесь коэффициент при $x^{\deg s(x)+m}$ равен $\operatorname{lc} s(x)\, I(\deg s(x))$, где $\operatorname{lc} s(x)$ обозначает коэффициент полинома $s(x)$ при старшей степени x, т. е. при $x^{\deg s(x)}$. Таким образом, для полиномиального решения $y(x)$ степени $k = \deg y(x)$ для уравнения $L(y) = 0$ выполняется $I(k) = 0$. Если $I(n)$ не имеет неотрицательных целых корней, то $L(y) = 0$ не имеет полиномиальных решений. В противном случае максимальный целый корень полинома $I(n)$ можно использовать как верхнюю границу степени решения $y(x)$. В [4] приведены формулы вычисления числа m и полинома $I(n)$ по коэффициентам оператора L.

В [5] для поиска полиномиальных решений разностного уравнения был применен этот же подход с той лишь разницей, что разностный оператор L задан как полином от оператора сдвига σ: $\sigma y(x) = y(x+1)$. То есть L имеет вид

$$\tilde{a}_d(x)\sigma^d + \cdots + \tilde{a}_1(x)\sigma + \tilde{a}_0(x), \tag{5}$$

где $\tilde{a}_0(x), \ldots, \tilde{a}_d(x) \in K[x]$. Можно выполнить переход от записи (5) к (3) и затем построить $I(n)$. В [5] дается алгоритм построения $I(n)$ по коэффициентам $\tilde{a}_0(x), \ldots, \tilde{a}_d(x)$, что позволяет сократить вычисления, возникающие при переходе от записи (5) к (3).

В [6, гл.2, §6] в задаче построения полиномиальных решений снова рассматриваются дифференциальный и разностный случай уравнения, а также и q-разностной случай: уравнение $L(y) = 0$, где L имеет вид

$$a_d(x)Q^d + \cdots + a_1(x)Q + a_0(x). \tag{6}$$

Оператор Q определен следующим образом: $Q(y(x)) = y(qx)$, где q либо является таким ненулевым элементом K, что $|q^n| \neq 1$ для любого целого n, либо $K = K_1(q)$ и при этом элемент q поля K трансцендентен над полем K_1.

В [6] для этих трех случаев число m, появившееся в (4), обозначено через ω и названо *приращением* оператора L, а $I(n)$ названо *определяющим полиномом* оператора L. Там же, в п. 7.11, для случая дифференциального уравнения замечено, что тот же полином $I(n)$ может быть использован при рассмотрении решений в $K((x^{-1}))$, т. е. решений вида $y(x) = c_\mu x^\mu + c_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots$, где $c_\mu \neq 0$ ($\operatorname{val}_{x^{-1}} y(x) = \mu$ называется *валюацией ряда по* x^{-1}). Если уравнение $L(y) = 0$ имеет решение с

$\operatorname{val}_{x^{-1}} y(x) = \mu$, то μ является корнем $I(n)$, который в связи с этой задачей обозначается через $I_\infty(n)$. Для приращения используется обозначение ω_∞.

3. ИНДУЦИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

3.1. Совместимые базисы

В [7] для поиска полиномиальных решений $L(y) = 0$ предлагается использовать совместимый с оператором L полиномиальный базис. Последовательность $\mathcal{B} = \langle P_n \rangle_{n=0}^{\infty}$ полиномов из $K[x]$ такая, что $\deg P_n = n$ и $P_n | P_m$ для $0 \leqslant n < m$, называется *совместимым* с оператором L: $K[x] \to \to K[x]$ базисом пространства $K[x]$, если существуют $A, B \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такие, что для любого $n = 0, 1, \ldots$ выполняется $LP_n = \sum_{i=-A}^{B} \alpha_i(n) P_{n+i}$, где $\alpha_i(n) \in K$ для $n = 0, 1, \ldots, i = -A, -A+1, \ldots, B$, $\alpha_{-A}(n) \not\equiv 0$ и $P_n = 0$ для $n < 0$.

Множество всех формальных сумм $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n$, где $c_n \in K$ для $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, является кольцом. Обозначим его через $K[[\mathcal{B}]]$. Пусть $\mathcal{B}$ — совместимый с L базис. Для $s(x) \in K[[\mathcal{B}]]$ выполняется $L(s) = 0$, если и только если выполняется $\sum_{i=-B}^{A} \alpha_{-i}(n+i)\, c_{n+i} = 0$ для всех $n \geqslant 0$ при условии $c_n = 0$ для $n < 0$. В [7] показано, что для дифференциального и q-разностного оператора L совместимым базисом является $\langle x^n \rangle_{n=0}^{\infty}$, для разностного оператора — $\langle \binom{x}{n} \rangle_{n=0}^{\infty}$. Приведены формулы построения $\alpha_i(n)$ по коэффициентам оператора L для этих трех случаев. Таким образом, задача построения полиномиальных решений $\sum_{n=0}^{\deg y} c_n P_n$ (а также решений в виде формального ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n$) уравнения $L(y) = 0$ сводится к вычислению последовательности $\langle c_n \rangle_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющей рекуррентному соотношению

$$b_l(n) c_{n+l} + b_{l-1}(n) c_{n+l-1} + \cdots + b_t(n) c_{n+t} = 0, \qquad (7)$$

где $l \geqslant t$, $b_l(n) \not\equiv 0$, $b_t(n) \not\equiv 0$. При вычислении c_n полагается $c_n = 0$ для $n < 0$, а в задаче построения полиномиальных решений также — $c_n = 0$ при всех достаточно больших значениях n. Уравнение $b_t(n - t) = 0$ является определяющим в задаче построения полиномиальных решений (множество его целых корней содержит все степени полиномиальных решений $L(y) = 0$). В роли определяющего полинома здесь выступает $b_t(n - t)$.

3.2. Индуцированность по базису

В [8] соотношение (7) названо *индуцированным* по базису $\mathcal{B}$ для $L(y) = 0$. *Индуцированным оператором* для L — соответствующий (7) оператор

$$\overset{\textcircled{i}}{L} = b_l(n) E^l + b_{l-1}(n) E^{l-1} + \cdots + b_t(n) E^t, \qquad (8)$$

где E — оператор сдвига: $Ec_n = c_{n+1}$, $E^{-1} c_n = c_{n-1}$. Ненулевые коэффициенты $b_l(n)$ и $b_t(n)$ называются ведущим и трейлинговым коэффициентами оператора $\overset{\textcircled{i}}{L}$ и соотношения $\overset{\textcircled{i}}{L}(c) = 0$, величины l и t — ведущим и трейлинговым порядками.

В [8] показано, что множество всех совместимых с $\mathcal{B}$ операторов, обозначенное через $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$, является K-алгеброй и преобразование индуцированности, ставящее в соответствие $L \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ его индуцированный оператор $\overset{\textcircled{i}}{L}$, является изоморфизмом. То есть для любых двух операторов $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ и любых $a, b \in K$ выполняется:

$$\overset{\textcircled{i}}{(aL_1 + bL_2)} = a\overset{\textcircled{i}}{L_1} + b\overset{\textcircled{i}}{L_2} \;\text{ и }\; \overset{\textcircled{i}}{(L_1 L_2)} = \overset{\textcircled{i}}{L_1}\overset{\textcircled{i}}{L_2}.$$

Из этого следует, что если $\mathcal{B}$ — совместимый базис с оператором ξ: $K[x] \to K[x]$ и совместимый с оператором x (т. е. с оператором — умножением на независимую переменную x), то $\mathcal{B}$ является совместимым с любым $L \in K[x, \xi]$ и преобразование перехода к индуцированному оператору задается двумя правилами: для ξ и x.

Индуцированные рекуррентные соотношения можно использовать при построении решений вида $y(x) = \sum_{n=\nu}^{\infty} c_n P_n$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $c_\nu \neq 0$, если оказывается возможным продлить полиномиальный базис для отрицательных значений n. В дифференциальном и q-разностном случае для этого подходит двусторонняя последовательность рациональных функций $\langle x^n \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$. В [9], [10] показано, что в разностном случае может быть использована последовательность $\langle x^{\underline{n}} \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$ по “падающим” степеням:

$$x^{\underline{n}} = \begin{cases} x(x-1)\ldots(x-n+1), & \text{если } n > 0, \\ 1, & \text{если } n = 0, \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)\ldots(x+|n|)}, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

Пространство всех рядов по $\mathcal{B} = \langle P_n \rangle_{n \in \mathbb{Z}}$ над K, т. е. рядов вида $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n P_n$, $c_n \in K$ и $c_n = 0$ для всех достаточно больших по модулю отрицательных n, обозначим через $K((\mathcal{B}))$. Для элементов этого пространства вводятся понятия валюации val_+ и ведущего коэффициента lc_+, аналогично случаю степенных лорановых рядов, т. е. случаю $P_n = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Решение уравнения в виде ряда из $K((\mathcal{B}))$ будем называть лорановым.

Пусть для уравнения $L(y) = 0$ с полиномиальными коэффициентами и совместимого с ним двустороннего базиса $\mathcal{B}$ индуцированным оператором является (8). Уравнение $b_l(n - l) = 0$, где $b_l(n)$ — ведущий коэффициент индуцированного оператора, l — его ведущий порядок, называется *определяющим* уравнением ($b_l(n-l)$ — определяющим полиномом) в задаче построения решений в $K((\mathcal{B}))$. Множество всех целых корней определяющего уравнения содержит все валюации таких решений.

Аналогично, пространство всех рядов вида $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n P_n$, $c_n \in K$ таких, что $c_n = 0$ для всех достаточно больших n, обозначим через $K((\mathcal{B}))^-$. Для элементов этого пространства вводятся понятия валюации val_- и ведущего коэффициента lc_-. Уравнение $b_t(n-t) = 0$ называется *определяющим* уравнением ($b_l(n-l)$ — определяющим полиномом) в задаче построения решений в $K((\mathcal{B}))^-$.

Пример 1. Для кольца дифференциальных операторов из $K[x, D]$ и базиса $\langle x^n\rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ преобразование перехода к индуцированному оператору задается правилами

$$x \to E^{-1}, \quad D \to (n+1)E.$$

Для $L = (-x^2+1)D^2 - 2\,x\,D + 12$ по этим правилам получаем

$$\begin{aligned} L^{\textcircled{i}} &= (-E^{-2}+1)(n+1)E(n+1)E - 2E^{-1}(n+1)E + 12 = \\ &= -(n-1)n\,c_n + (n+1)(n+2)c_{n+2} - 2\,n\,c_n + 12\,c_n = \\ &= (n+1)(n+2)c_{n+2} - (n+4)(n-3)c_n. \end{aligned}$$

Пример 2. Для кольца q-разностных операторов из $K(q)[x, Q]$ и базиса $\langle x^n\rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ переход к индуцированному оператору выполняется по правилам

$$x \to E^{-1}, \quad Q \to q^n.$$

Для $L = (q^6x^3+1)Q^2 - q^{14}$ получаем $L^{\textcircled{i}} = (q^{2n} - q^{14}) + q^{2n}E^{-3}$.

Пример 3. Для разностных операторов из $K[x, \sigma]$ и базиса $\langle x^{\underline{n}}\rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ переход к индуцированному оператору выполняется по правилам

$$x \to n + E^{-1}, \quad \sigma \to 1 + (n+1)E.$$

Например, для $L = (x+6)\,\sigma - (x+1)$ получаем $L^{\textcircled{i}} = (n+6)(n+1)E + (n+5)$.

4. ИНДУЦИРОВАННЫЕ РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ

Далее рассматривается уравнение $L(y) = 0$, где $L \in K[x, \xi]$, $\xi \in \{D, Q, \sigma\}$ и совместимый с ξ двусторонний базис $\mathcal{B} = \langle P_n\rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ рациональных функций. То есть выполняются условия, сформулированные в [7], [8] и [9]:

- $P_n \in K[x]$ и $\deg P_n = n$ для $n \geqslant 0$;
- $P_n | P_m$ для $0 \leqslant n < m$;
- $P_n^{-1} \in K[x]$ и $\deg P_n^{-1} = -n$ для $n < 0$;
- $P_n^{-1} | P_m^{-1}$ для $m < n < 0$;
- существуют $A, B \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ такие, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$\xi P_n = \sum_{i=-A_1}^{B_1} \alpha_{1,i}(n) P_{n+i},$$

где $\alpha_{1,i}(n) \in K$ для $n \in \mathbb{Z}$, $i = -A_1, -A_1+1, \ldots, B_1$, $\alpha_{-A_1}(n) \not\equiv 0$;

$$xP_n = \sum_{i=-A_2}^{B_2} \alpha_{2,i}(n) P_{n+i},$$

где $\alpha_{2,i}(n) \in K$ для $n \in \mathbb{Z}$, $i = -A_2, -A_2+1, \ldots, B_2$, $\alpha_{-A_2}(n) \not\equiv 0$.

В примерах 1–3 приведены двусторонние базисы, совместимые с $\xi \in \{D, Q, \sigma\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{B} = \langle P_n\rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ совместимый с ξ двусторонний базис и $L \in K[x, \xi]$ Тогда существуют*

(i) такие $\omega_{L,+} \in \mathbb{Z}$, $I_{L,+} \in K[\lambda]$, что для произвольного $s(x) \in K((\mathcal{B}))$, $\mathrm{val}_+ s(x) = \nu$, $\mathrm{tc}_+\, s(x) = c_\nu$, выполнено

$$L(s) = c_\nu I_{L,+}(\nu) P_{\nu+\omega_{L,+}} + \ldots, \tag{9}$$

где многоточие означает ряд из $K((\mathcal{B}))$ с валюацией val_+ большей, чем $\nu + \omega_{L,+}$;

(ii) такие $\omega_{L,-} \in \mathbb{Z}$, $I_{L,-} \in K[\lambda]$, что для произвольного $u(x) \in K((\mathcal{B}))^-$, $\mathrm{val}_- u(x) = \mu$, $\mathrm{tc}_-\, u(x) = d_\mu$, выполнено

$$L(u) = d_\mu I_{L,-}(\mu) P_{\mu+\omega_{L,-}} + \ldots, \tag{10}$$

где многоточие означает ряд из $K((\mathcal{B}))^-$ с валюацией val_- меньшей, чем $\mu + \omega_{L,-}$.

Доказательство. Пусть для L индуцированный оператор $L^{\textcircled{i}}$ по совместимому базису $\mathcal{B}$ имеет вид (8). Применение L к двустороннему ряду $s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n P_n$ даст ряд $\bar{s}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n P_n$. Двусторонняя последовательность $\bar{c}_n$ получается применением оператора $L^{\textcircled{i}}$ к последовательности c_n:

$$\bar{c}_n = b_l(n)c_{n+l} + \cdots + b_t(n)c_{n+t}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы имеем

$$L(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(L^{\textcircled{i}}(c)\right)_n P_n.$$

Пусть $\operatorname{val}_+ s(x) = \nu$ и $\operatorname{tc}_+ s(x) = c_\nu$. Поскольку $c_n = 0$ для $n < \nu$, то $\left(L^{\textcircled{i}}(c)\right)_n = 0$ для всех $n < \nu - l$ и $\left(L^{\textcircled{i}}(c)\right)_{\nu-l} = b_l(\nu - l)c_\nu$. То есть выполняется утверждение (i) теоремы при $\omega_{L,+} = -l$, $I_{L,+}(\lambda) = b_l(\lambda + \omega_{L,+})$.

В случае $u(x) = u_\mu P_\mu + u_{\mu-1}P_{\mu-1} + \ldots$, $u_\mu \neq 0$, поскольку $d_n = 0$ для $n > \mu$, то $\left(L^{\textcircled{i}}(d)\right)_n = 0$ для всех $n > \mu - t$ и $\left(L^{\textcircled{i}}(c)\right)_{\mu-t} = b_t(\mu - t)c_\mu$. Выполняется утверждение (ii) теоремы при $\omega_{L,-} = -t$, $I_{L,-}(\lambda) = b_t(\lambda + \omega_{L,-})$. □

Поиск лорановых решений по совместимому с ξ базису корректен и в случае оператора с коэффициентами рядами: $L \in K[[x]][\xi]$. Индуцированный оператор $L^{\textcircled{i}}$ в общем случае будет иметь бесконечный порядок и иметь вид

$$b_l(n)E^l + b_{l-1}(n)E^{l-1} + \ldots$$

Для такого оператора существуют $\omega_{L,+} \in \mathbb{Z}$ и $I_{L,+} \in K[\lambda]$, как в теореме 1(i).

Умножение на x^{-1} является оператором, совместимым с $\langle x^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$: $x^{-1} \to E$. Поэтому для ξ, совместимого с $\langle x^n \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ (например, $\xi \in \{D, Q\}$), возможен поиск лорановых решений в $K((x^{-1}))$ для уравнения $L(y) = 0$, где $L \in K((x^{-1}))[\xi]$. В этом случае индуцированный оператор $L^{\textcircled{i}}$ в общем случае будет иметь вид

$$\cdots + b_{t+1}(n)E^{t+1} + b_t(n)E^t,$$

будут существовать $\omega_{L,-} \in \mathbb{Z}$ и $I_{L,-} \in K[\lambda]$, как в теореме 1(ii).

Доказательство, проведенное для случая L с полиномиальными коэффициентами, корректно и для этих двух случаев.

Обратим особое внимание на то, что полином $I_{L,+}(\lambda)$ (и $I_{L,-}(\lambda)$) в (9) (соответственно, (10)) будет одним и тем же для любого $s(x)$ ($u(x)$) указанного вида, этот полином целиком задан оператором L и совместимым с ξ базисом $\mathcal{B}$.

Следующее определение, по сути, обобщает определения из [2], [4], [6–8].

Определение 1. Полином $I_{L,+}(\lambda)$ в (9) назовем *определяющим полиномом* оператора L для задачи поиска решений в $K((\mathcal{B}))$. Полином $I_{L,-}(\lambda)$ в (10) — *определяющим полиномом* оператора L для задачи поиска решений в $K((\mathcal{B}))^-$.

Пример 4. Для дифференциального оператора L из примера 1 в задаче построения для $L(y) = 0$ решений в $K((x))$ определяющее уравнение: $\lambda(\lambda - 1) = 0$. Множество $\{0, 1\}$ его целых корней содержит все валюации val_+ решений. Коэффициенты этих решений последовательно вычисляются с помощью $L^{\textcircled{i}}(c) = 0$, начиная с нижней границы валюаций до любого заданного n, т. е. в данном примере последовательно вычисляются $c_0, c_1, \ldots, c_n$. Выпишем решение до x^4:

$$C_1 + C_2\, x - 6\, C_1 x^2 - \frac{5}{3}\, C_2 x^3 + 3\, C_1 x^4 + \ldots,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В задаче построения решений в $K((x^{-1}))$ определяющее уравнение есть $-(\lambda - 3)(\lambda + 4) = 0$. Множество $\{-4, 3\}$ его целых корней содержит все валюации val_- решений. Коэффициенты этих решений последовательно вычисляются с помощью $L^{\textcircled{i}}(c) = 0$, начиная с верхней границы валюаций до любого заданного n, т. е. последовательно вычисляются $c_3, c_2, \ldots, c_n$. Выпишем для данного примера решения до x^{-4}:

$$C_1 x^3 - \frac{3}{5}\, C_1 x + C_2 x^{-4} + \ldots,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Уравнение $L(y) = 0$ имеет и полиномиальные решения: $C_1 x^3 - \frac{3}{5}\, C_1 x$.

Пример 5. Для q-разностного оператора L из примера 2 в задаче построения решений в $K((x))$ определяющее уравнение $(q^\lambda - q^7)(q^\lambda + q^7) = 0$ имеет один целый корень: $\lambda = 7$. Выпишем начальные члены лоранова решения для $L(y) = 0$ до x^{13}:

$$C\left(x^7 - \frac{q^{20}x^{10}}{q^{20} - q^{14}} + \frac{q^{46}x^{13}}{(q^{26} - q^{14})(q^{20} - q^{14})} + \ldots\right),$$

где C — произвольная постоянная.

В задаче построения решений в $K((x^{-1}))$ определяющее уравнение $q^6 q^{2\lambda} = 0$ не имеет целых корней. Следовательно, уравнение $L(y) = 0$ не имеет ненулевых решений в $K((x^{-1}))$ и не имеет полиномиальных решений.

Пример 6. Для разностного оператора L из примера 3 и базиса $\mathcal{B} = \langle x^{\underline{n}} \rangle_{n\in\mathbb{Z}}$ определяющий полином $I_{L,+}(\lambda) = (\lambda + 5)\lambda$ имеет два целых корня: $\{-5, 0\}$. Начальные члены решений в $K((\mathcal{B}))$ для $L(y) = 0$:

$$C_1 x^{\underline{-5}} + C_2\, x^{\underline{0}} - \frac{5}{6}\, C_2\, x^{\underline{1}} + \ldots,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В задаче построения решений в $K((\langle x^{\underline{n}} \rangle_{n\in\mathbb{Z}}))^-$ определяющий полином $I_{L,-}(\lambda) = (\lambda + 5)$ имеет один корень, ему соответствуют решения

$$C_1 x^{\underline{-5}} + \ldots$$

Здесь многоточие обозначает члены ряда с $x^{\underline{n}}$ для $n < -5$. Не трудно убедиться, что коэффициенты в этих членах все равны 0: $c_n = 0$, $n < -5$. То есть уравнение $L(y) = 0$ имеет решения в виде лоранова полинома:

$$C_1 x^{\underline{-5}} = \frac{C_1}{(x+5)(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}.$$

Примечание 1. Определяющее уравнение, которое мы получаем посредством индуцированного оператора в дифференциальном случае, совпадает с тем, которое дает метод Фробениуса (раздел 2.1), что подтверждается прямой проверкой. В этом смысле посредством индуцированных операторов устанавливается родство определяющих уравнений для разностного и q-разностного случаев с классическим дифференциальным случаем.

5. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПОЛИНОМЫ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ

Теорема 2. (О мультипликативности определяющего полинома.) *Пусть $\mathcal{B}$ совместимый с оператором ξ двусторонний базис. Пусть также $L_1, L_2 \in K[x,\xi]$. Тогда для ω_*, $I_*(\lambda)$, где $* \in \{+,-\}$, выполняется*

(i) $\omega_{L_1L_2,*} = \omega_{L_1,*} + \omega_{L_2,*}$;

(ii) $I_{L_1L_2,*}(\lambda) = I_{L_1,*}(\lambda + \omega_{L_2,*}) I_{L_2,*}(n)$.

Доказательство. Пусть индуцированные операторы для L_1 и L_2 имеют вид

$$L_1^{ⓘ} = b_{1,l_1}(n)E^{l_1} + \cdots + b_{1,t_1}(n)E^{t_1};$$

$$L_2^{ⓘ} = b_{2,l_2}(n)E^{l_2} + \cdots + b_{2,t_2}(n)E^{t_2}.$$

Из доказательства теоремы 1 следует:

$$l_i = -\omega_{L_i,+} \text{ и } b_{i,l_i}(n) = E^{-\omega_{L_i,+}} I_{L_i,+}(n);$$

$$t_i = -\omega_{L_i,-} \text{ и } b_{i,t_i}(n) = E^{-\omega_{L_i,-}} I_{L_i,-}(n),$$

$i = 1, 2$. Из [8] известно,

$$(L_1L_2)^{ⓘ} = L_1^{ⓘ} L_2^{ⓘ}.$$

Раскрываем произведение из правой части последнего равенства:

$$\begin{aligned}
&(E^{-\omega_{L_1,+}} I_{L_1,+}(n) + \cdots + E^{-\omega_{L_1,-}} I_{L_1,-}(n)) \times \\
&\times (E^{-\omega_{L_2,+}} I_{L_2,+}(n) + \cdots + E^{-\omega_{L_2,-}} I_{L_2,-}(n)) = \\
&= \sigma^{-\omega_{L_1,+}-\omega_{L_2,+}} I_{L_1,+}(n + \omega_{L_2,+}) I_{L_2,+}(n) + \cdots + \\
&+ \sigma^{-\omega_{L_1,-}-\omega_{L_2,-}} I_{L_1,-}(n + \omega_{L_2,-}) I_{L_2,-}(n).
\end{aligned}$$

Отсюда получаются (i), (ii).

Из приведенного доказательства теоремы 2 следует, что определяющий полином обладает мультипликативным свойством, указанным в пункте (ii) этой теоремы. □

Следствие 1. Пусть $L_1, \ldots, L_m \in K[x,\xi]$ и $\mathcal{B}$ совместимый с ξ базис. Тогда для $* \in \{+,-\}$

(i) $\omega_{L_1\ldots L_m,*} = \omega_{L_1,*} + \cdots + \omega_{L_m,*}$;

(ii)

$$I_{L_1\cdots L_m,*}(\lambda) = \Pi_{i=1}^m I_{L_i,*}(\lambda + \Sigma_{j=i+1}^m \omega_{L_j,*}).$$

Пример 7. Для дифференциального оператора L из примеров 1 и 4 построим определяющие полиномы для L^5. Для этого нет необходимости выполнять возведение в степень оператора и строить для L^5 индуцированный оператор. Используя следствие 1, получаем

$$\omega_{L^5,+} = 5\,\omega_{L,+} = -10;$$

$$\begin{aligned}
I_{L^5,+}(\lambda) &= \Pi_{i=1}^5 I_{L,+}(\lambda + (5-j)\omega_{L,+}) = \\
&= \Pi_{i=1}^5 (\lambda - 2(5-j))(\lambda - 1 - 2(5-j)) = \\
&= \Pi_{i=0}^9 (\lambda - i) = \lambda^{\underline{10}};
\end{aligned}$$

$$\omega_{L^5,-} = 5\,\omega_{L,-} = 0;$$

$$\begin{aligned}
I_{L^5,-}(\lambda) &= \Pi_{i=1}^5 I_{L,-}(\lambda + (5-j)\omega_{L,-}) = \\
&= \Pi_{i=1}^5 (3-\lambda)(\lambda+4) = \\
&= (3-\lambda)^5(\lambda+4)^5.
\end{aligned}$$

Пример 8. Пусть

$$\begin{aligned}
L_1 &= (q^6x^3 + 1)\,Q^2 - q^{14}; \\
L_2 &= (x^2 + q)\,Q - (q^2x^2 + q).
\end{aligned}$$

Определяющие уравнения для L_1 приведены в примере 5. Индуцированный оператор для L_2 по правилам из примера 2

$$L_2^{ⓘ} = (-q + qq^n) + (-q^2 + \frac{q^n}{q^2})E^{-2}.$$

Получаем

$$\begin{aligned}
&\omega_{L_1,+} = 0, \quad I_{L_1,+}(\lambda) = (q^\lambda - q^7)(q^\lambda + q^7); \\
&\omega_{L_1,-} = 3, \quad I_{L_1,-}(\lambda) = q^6 q^{2\lambda}; \\
&\omega_{L_2,+} = 0, \quad I_{L_2,+}(\lambda) = q(q^\lambda - 1); \\
&\omega_{L_2,-} = 2, \quad I_{L_2,-}(\lambda) = q^\lambda - q^2.
\end{aligned}$$

Используя теорему 2, получаем для произведения операторов L_1L_2:

$$\omega_{L_1L_2,+} = 0,$$

$$I_{L_1L_2,+}(\lambda) = q(q^\lambda - 1)(q^\lambda - q^7)(q^\lambda + q^7);$$

$$\omega_{L_1L_2,-} = 5,$$

$$I_{L_1L_2,-}(\lambda) = q^{10}q^{2\lambda}(q^\lambda - q^2).$$

Пример 9. Пусть

$$\begin{aligned} L_1 &= (x+6)\,\sigma - (x+1); \\ L_2 &= x(x-1)\,\sigma^2 + 1. \end{aligned}$$

Определяющие уравнения для L_1 приведены в примере 6. Индуцированный оператор для L_2 по правилам из примера 3

$$\begin{aligned} L_2^{ⓘ} = n(-1+n)(n+2)(n+1)E^2 &+ \\ + 4n(n-1)(n+1)E + (6n^2-6n+1) &+ \\ + 4(n-1)E^{-1} + E^{-2}&. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} \omega_{L_1,+} &= -1, \quad I_{L_1,+}(\lambda) = (\lambda+5)\lambda; \\ \omega_{L_1,-} &= 0, \quad I_{L_1,-}(\lambda) = (\lambda+5); \\ \omega_{L_2,+} &= -2, \quad I_{L_2,+}(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1)\lambda; \\ \omega_{L_2,-} &= 2, \quad I_{L_2,-}(\lambda) = 1. \end{aligned}$$

Используя теорему 2, получаем для произведения операторов L_1L_2:

$$\omega_{L_1L_2,+} = -3,$$

$$I_{L_1L_2,+}(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)^2(\lambda-1)\lambda(\lambda+3);$$

$$\omega_{L_1L_2,-} = 2,$$

$$I_{L_1L_2,-}(\lambda) = (\lambda+7).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов С.А.* О мультипликативном свойстве определяющих полиномов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. (Принято к печати).
2. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
3. *Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э.* Компьютерная алгебра. М.: Мир, 1991.
4. *Абрамов С.А.* Задачи компьютерной алгебры, связанные с поиском полиномиальных решений линейных дифференциальных и разностных уравнений // Вестн. МГУ. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. 1989. № 3. С. 53–60.
5. *Petkovsek M.* Finding closed-form solutions of difference equations by symbolic methods. Ph.D. Dissertation. Carnegie Mellon University, USA. Order Number: UMI Order No. GAX91-33361. 1991.
6. *Абрамов С.А.* Элементы компьютерной алгебры линейных обыкновенных дифференциальных, разностных и q-разностных операторов. М.: МЦНМО, 2012.
7. *Abramov S., Bronstein M., Petkovsek M.* On polynomial solutions of linear operator equations // ISSAC'95 Proceedings. 1995. P. 290–295.
8. *Abramov S., Petkovsek M., Ryabenko A.* Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Math. 2000. V. 210. P. 3–25.
9. *Хмельнов Д.Е.* Выбор базиса при решении линейных функциональных уравнений // Программирование. 2002. № 2. С. 61–65.
10. *Хмельнов Д.Е.* Поиск полиномиальных решений линейных функциональных систем с помощью индуцированных рекурренций // Программирование. 2004. № 2. С. 8–16.

POLYNOMIAL RELATIONS FOR BOUNDS ON THE EXPONENTS IN SOLUTIONS TO OPERATOR EQUATIONS

S. A. Abramov[a], A. A. Ryabenko[a]

[a] *Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences*
Vavilova 44, bld. 2, Moscow, 119333 Russia

A general approach to finding the indicial polynomials for differential, difference, and q-difference operators is discussed. The structure of such a polynomial corresponding to the product of operators is considered.

Keywords: defining polynomials, linear ordinary differential equations, difference equations, polynomial solutions, Laurent solutions, computer algebra

REFERENCES

1. *Abramov S.A.* On the multiplicative property of indicial polynomials // Comput. Math. Math. Phys. (in press).
2. *Coddington E.A., Levinson N.* Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955.
3. *Davenport J., Siret Y., Tournier E.* Calcul formel. Paris: Masson, 1987.
4. *Abramov S.A.* Problems of computer algebra involved in the search for polynomial solutions of linear differential and difference equations // Moscow Univ. Comput. Math. and Cybernet, 1989, no. 3, pp. 63–68.
5. *Petkovsek M.* Finding closed-form solutions of difference equations by symbolic methods. Ph.D. Dissertation. Carnegie Mellon University, USA. Order Number: UMI Order No. GAX91-33361. 1991.
6. *Abramov S.A.* Elements of Computer Algebra and Linear Ordinary Differential, Difference, and Difference Operators, Moscow: Mosk. Tsentr Nepreryvnogo Mat. Obrazovaniya, 2012 [in Russian].
7. *Abramov S., Bronstein M., Petkovsek M.* On polynomial solutions of linear operator equations // Proc. of ISSAC'95, 1995, pp. 290–295.
8. *Abramov S.A., Petkovsek M., Ryabenko A.* Special formal series solutions of linear operator equations // Discrete Math., 2000, vol. 210, pp. 3–25.
9. *Khmelnov D.E.* Basis selection in solving linear functional equations // Program. Comput. Software, 2002, vol. 28, no. 2. pp. 102–105.
10. *Khmelnov D.E.* Search for polynomial solutions of linear functional systems by means of induced recurrences // Program. Comput. Software, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 61–67.