КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 519.6+521.1+004.94

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИЯХ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗАДАЧЕ МНОГИХ ТЕЛ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ МАССАМИ

© 2025 г. А. Н. Прокопеня[a],*, М. Дж. Минглибаев[b],, М. Р. Сапарова[b],*****

[a] *Варшавский университет естественных наук – SGGW, Польша*
02-776 Варшава, ул. Новоурсыновска, 159
[b] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Казахстан*
050040 Алматы, пр. аль-Фараби, 71
**E-mail: alexander_prokopenya@sggw.edu.pl*
***E-mail: minglibayev@gmail.com*
****E-mail: moldir170788@gmail.com*

Поступила в редакцию 21.08.2024 г.
После доработки 28.08.2024 г.
Принята к публикации 22.09.2024 г.

Рассматривается проблема получения дифференциальных уравнений, определяющих вековые возмущения орбитальных элементов в многопланетной системе в случае, когда центральная звезда теряет свою массу изотропно, а массы планет могут изменяться анизотропно, что приводит к появлению реактивных сил. В качестве модели многопланетной системы используется классическая задача $(n + 1)$ тел переменной массы, когда n тел движутся вокруг центральной звезды по квазиэллиптическим непересекающимся орбитам и взаимодействуют друг с другом в соответствии с законом всемирного тяготения. Предполагается, что массы тел изменяются с различными скоростями, причем законы изменения масс считаются произвольными заданными функциями времени. Получены дифференциальные уравнения движения тел в оскулирующих элементах апериодического движения по квазиконическим сечениям, соответствующие планетарным уравнениям Лагранжа. Обсуждается алгоритм вычисления возмущающих функций в виде степенных рядов по малым параметрам и получение дифференциальных уравнений, определяющих вековые возмущения орбитальных элементов. Все необходимые символьные вычисления выполняются с использованием системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

Ключевые слова: задача многих тел, переменная масса, уравнения движения, реактивные силы, вековые возмущения, Wolfram Mathematica

DOI: 10.31857/S0132347425010051, **EDN**: DXMMXG

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая задача многих тел описывает движение материальных точек постоянной массы, взаимодействующих друг с другом в соответствии с законом всемирного тяготения, и является базовой моделью небесной механики (см., напр., [1,2]). Дифференциальные уравнения движения тел можно легко записать на основе второго закона Ньютона, но получить их общее решение в аналитическом виде в случае трех и более тел не представляется возможным. Используя современные компьютерные системы, можно найти численные решения уравнений движения на достаточно больших интервалах времени (см., напр., [3,4]). Однако численные решения не позволяют получить достаточно общих результатов, поскольку такие решения не могут быть найдены для всех возможных начальных условий.

Используя методы теории возмущений, можно исследовать эволюцию и устойчивость систем многих тел и получить более общие аналитические результаты (см. [5–10]). Такие исследования обычно связаны с выполнением весьма громоздких символьных вычислений, что стимулировало разработку соответствующих аналитических и численно-аналитических методов и алгоритмов (см., напр., [11–16]). Следует отметить, что в указанных работах все параметры небесных тел считаются постоянными.

Учет нестационарности тел, например, зависимости их масс от времени (см., напр., [17–20]), приводит к существенному усложнению задачи многих тел. Даже в задаче двух тел, общее решение которой при постоянных массах хорошо известно и может быть использовано в качестве первого приближения при исследовании планетных систем, найти аналитическое решение уравнений движения удается только в специальных случаях (см. [21]). Поэтому исследование нестационарных систем многих тел требует построения точного решения соответствующей нестационарной задачи двух тел и обобщения классической теории возмущений (см. [22–24]). Специальные случаи задачи трех и четырех тел переменной массы рассмотрены в [25–31].

Целью данной работы является исследование динамической эволюции планетных систем в общем случае $(n+1)$ тел, когда центральное тело-звезда P_0 теряет массу изотропно, а массы планет $P_1, ..., P_n$ могут изменяться анизотропно, что приводит к возникновению реактивных сил. Массы всех тел являются заданными функциями времени $m_0 = m_0(t), m_i = m_i(t), i = 1, 2, ..., n$, причем скорости их изменения различны, а сами тела притягивают друг друга в соответствии с законом всемирного тяготения. Мы ограничимся наиболее простым случаем планетной системы, в которой планеты движутся вокруг звезды по непересекающимся орбитам [22, 33]. Основное внимание уделяется обсуждению вычислительных задач, возникающих при получении планетарных уравнений Лагранжа, разложении возмущающих функций в степенные ряды по малым параметрам и определении эволюционных уравнений для орбитальных параметров. Отметим, что для решения таких лучше всего использовать системы компьютерной алгебры. В данной работе все символьные вычисления выполняются с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica* [34], которая имеет удобный интерфейс и позволяет легко комбинировать различные виды вычислений. При этом для выполнения описанных в работе вычислений можно воспользоваться и другой системой компьютерной алгебры в зависимости от предпочтений исследователей.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагая, что начало координат совпадает с центром наиболее массивного тела P_0 и используя относительные декартовы координаты $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, уравнения движения тел $P_1, ..., P_n$ можно записать в виде (см. [22, 27, 32])

$$\ddot{\vec{r}}_i + G(m_0 + m_i)\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \vec{F}_i^{(r)} + \sum_{j=1(j\neq i)}^{n} m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j}{r_j^3} \right), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1}$$

где G — гравитационная постоянная,

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \quad \vec{F}_i^{(r)} = \frac{\dot{m}_i}{m_i}\vec{V}_i,$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2},$$

а точка над символом в уравнении (1) означает полную производную соответствующей функции по времени. Реактивные силы $\vec{F}_i^{(r)}$ в уравнении (1) появляются вследствие неизотропного изменения масс тел и зависят от относительной скорости $\vec{V}_i$ частиц, покидающих тело P_i или осаждающихся на нем.

Поскольку найти общее решение системы (1) не представляется возможным даже при постоянных массах тел, для ее исследования воспользуемся теорией возмущений. Если пренебречь взаимодействием тел $P_1, P_2, ..., P_n$ между собой, а также реактивными силами $\vec{F}_i^{(r)}$, и обнулить правую часть в (1), в первом приближении получим n независимых задач двух тел, которые при постоянных массах легко интегрируются. Поскольку при переменных массах классическая задача двух тел в общем случае не интегрируется, добавим в левой и правой части уравнения (1) слагаемое $\left(-\ddot{\gamma}_i\vec{r}_i/\gamma_i\right)$ и перепишем его в виде

$$\ddot{\vec{r}}_i + G(m_0 + m_i)\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - \frac{\ddot{\gamma}_i}{\gamma_i}\vec{r}_i = \vec{\nabla}_{\vec{r}_i} W_i, \tag{2}$$

где возмущающие функции W_i в правой части уравнений (2) имеют вид (см. [22, 27])

$$W_i = G\sum_{j=1(j\neq i)}^{n} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right) - \\ - \frac{\ddot{\gamma}_i}{2\gamma_i} r_i^2 + \vec{F}_i^{(r)} \cdot \vec{r}_i. \tag{3}$$

Дважды непрерывно дифференцируемые функции $\gamma_i(t)$ в (2), (3) определяются соотношениями

$$\gamma_i(t) = \frac{m_{00} + m_{i0}}{m_0(t) + m_i(t)},$$

где $m_{00} = m_0(t_0)$, $m_{i0} = m_i(t_0)$ — значения масс тел в начальный момент времени t_0. Отметим, что законы изменения масс во времени $m_j(t)$ $(j = 0, 1, ..., n)$ определяются на основе наблюдений за движением небесных тел и считаются известными. При постоянных массах производные функций $\gamma_i(t)$ в (2), (3) исчезают и уравнения

(2) сводятся к классической задаче многих тел (см. [1]). Добавление в левой части уравнений (2) слагаемого, пропорционального второй производной функции $\gamma_i(t)$, обеспечивает интегрируемость уравнений (2) при $W_i = 0$, $i = 1, 2, ..., n$, что позволяет получить n независимых уравнений, точные решения которых определяют движение тел $P_1, P_2, ..., P_n$ вокруг тела P_0 по квазиконическим сечениям (см. [22]). Соответствующие точные решения, которые далее будем использовать в качестве первого приближения, можно представить в виде (см. [24, 26, 29])

$$x_j = \gamma_j\rho_j\left((\cos E_j - e_j)\left(\cos\omega_j\cos\Omega_j - \right.\right.$$
$$\left. - \sin\omega_j\sin\Omega_j\cos i_j\right) - \sqrt{1-e_j^2}\left(\sin\omega_j\cos\Omega_j + \right.$$
$$\left.\left. + \cos\omega_j\sin\Omega_j\cos i_j\right)\sin E_j\right);$$
$$y_j = \gamma_j\rho_j\left((\cos E_j - e_j)\left(\cos\omega_j\sin\Omega_j + \right.\right.$$
$$\left. + \sin\omega_j\cos\Omega_j\cos i_j\right) - \sqrt{1-e_j^2}\left(\sin\omega_j\sin\Omega_j - \right.$$
$$\left.\left. - \cos\omega_j\cos\Omega_j\cos i_j\right)\sin E_j\right);$$
$$z_j = \gamma_j\rho_j\left((\cos E_j - e_j)\left(\sin\omega_j + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{1-e_j^2}\cos\omega_j\sin E_j\right)\sin i_j, \quad (4)$$

где

$$\rho_j = a_j(1 - e_j\cos E_j), \quad (j = 1, 2, ..., n), \quad (5)$$

переменная E_j является аналогом эксцентрической аномалии (см. [1, 22]) и определяется уравнением

$$E_j - e_j\sin E_j = M_j = \frac{\sqrt{\mu_{j0}}}{a_j^{3/2}}(\Phi_j(t) - \Phi_j(\tau_j)); \quad (6)$$

$$\Phi_j(t) = \int_{t_0}^{t}\frac{dt}{\gamma_j^2(t)};$$

$$\mu_{j0} = G(m_{00} + m_{j0}), \ j = 1, 2, ..., n.$$

Здесь M_j, τ_j — соответственно аналоги средней аномалии и времени прохождения тела P_j через перицентр. Параметры $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j$, определяемые из начальных условий движения, соответствуют известным из классической задачи двух тел кеплеровским орбитальным элементам и являются аналогами большой полуоси, эксцентриситета, наклонения, долготы восходящего узла и долготы перицентра невозмущенной квазиэллиптической орбиты каждого из тел P_j (см. [1, 2, 22]).

Отметим, что в случае постоянных масс, когда $\gamma_j(t) \equiv 1$, уравнения (4) и (5) определяют движение тел P_i ($i = 1, 2, ..., n$) вокруг тела P_0 по коническим сечениям. Наличие в выражениях (4) масштабного множителя $\gamma_j(t)$, зависящего от времени, приводит к деформации конических сечений и непериодичности движения. Поэтому говорят, что решения уравнений движения (2) в случае $W_i = 0$ описывают апериодическое движение тел по квазиконическим сечениям (см. [22]). При заданных орбитальных параметрах $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$ каждого из тел P_j, а также известных функциях $\gamma_j(t)$, которые зависят от законов изменения масс всех тел, уравнение (6) позволяет найти эксцентрические аномалии E_j как функции времени. В результате выражения (4), (5) позволяют вычислить относительные декартовы координаты тел P_j и полностью описать их невозмущенное движение.

3. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

В рассматриваемом случае многопланетной задачи предполагается, что масса центрального тела P_0 значительно превышает массы планет P_j ($j = 1, 2, ..., n$). Поэтому в первом приближении их орбиты будут квазиконическими сечениями, определяемыми уравнениями (4)–(6). Взаимное гравитационное притяжение, а также реактивные силы, возникающие при анизотропном изменении масс тел P_j ($j = 1, 2, ..., n$), влияют на их движение и приводят к зависимости орбитальных элементов $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$ от времени. Принимая во внимание такую зависимость, решения уравнений (2) можно представить в общем виде

$$\begin{aligned} x_j &= x_j(a_j(t), e_j(t), i_j(t), \Omega_j(t), \omega_j(t), \chi_j(t), t);\\ y_j &= y_j(a_j(t), e_j(t), i_j(t), \Omega_j(t), \omega_j(t), \chi_j(t), t); \quad (7)\\ z_j &= z_j(a_j(t), e_j(t), i_j(t), \Omega_j(t), \omega_j(t), \chi_j(t), t), \end{aligned}$$

где функции x_j, y_j, z_j в правых частях выражений (7) определяются невозмущенными решениями (4), (5), причем для удобства дальнейших вычислений вместо элемента τ_j (см. (6)) введен параметр χ_j, а эксцентрическая аномалия E_j определяется уравнением

$$E_j - e_j\sin E_j = M_j = \frac{\sqrt{\mu_{j0}}}{a_j^{3/2}}\Phi_j(t) + \chi_j. \quad (8)$$

Представление решений в виде (7) хорошо известно в теории дифференциальных уравнений как метод вариации произвольных постоянных. Производные координат x_j, y_j, z_j по времени также формально можно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \dot{x}_j(a_j(t), e_j(t), i_j(t), \Omega_j(t), \omega_j(t), \chi_j(t), t);\\ \dot{y}_j &= \dot{y}_j(a_j(t), e_j(t), i_j(t), \Omega_j(t), \omega_j(t), \chi_j(t), t); \quad (9)\\ \dot{z}_j &= \dot{z}_j(a_j(t), e_j(t), i_j(t), \Omega_j(t), \omega_j(t), \chi_j(t), t), \end{aligned}$$

где функции $\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j$ в правых частях (9) представляют собой частные производные соответствующих выражений (4) по времени при постоянных значениях орбитальных элементов $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \tau_j$. Использование встроенной в систему *Mathematica* функции $D[expr, var]$ (см. [34]) позволяет легко продифференцировать выражения (4), хотя получаемые результаты довольно громоздки.

Вычисляя производные по времени $\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j$ в выражениях (9) и подставляя их в уравнения (2), получаем $3n$ дифференциальных уравнений, определяющих орбитальные элементы $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \chi_j$:

$$\frac{\partial \dot{x}_j}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial e_j}\frac{de_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial i_j}\frac{di_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \Omega_j}\frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \chi_j}\frac{d\chi_j}{dt} = \frac{\partial W_j}{\partial x_j};$$

$$\frac{\partial \dot{y}_j}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} + \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial e_j}\frac{de_j}{dt} + \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial i_j}\frac{di_j}{dt} + \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \Omega_j}\frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{y}_j}{\partial \chi_j}\frac{d\chi_j}{dt} = \frac{\partial W_j}{\partial y_j};$$

$$\frac{\partial \dot{z}_j}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} + \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial e_j}\frac{de_j}{dt} + \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial i_j}\frac{di_j}{dt} + \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial \Omega_j}\frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial \dot{z}_j}{\partial \chi_j}\frac{d\chi_j}{dt} = \frac{\partial W_j}{\partial z_j}, \qquad (10)$$

где $j = 1, 2, ..., n$.

Для определения $6n$ орбитальных элементов требуется еще $3n$ уравнений, которые обычно получаются из условия равенства производных по времени искомых функций (7) и соответствующих производных (9) в каждой точке траектории (см. [1]). В результате получаем следующие уравнения

$$\frac{\partial x_j}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial e_j}\frac{de_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial i_j}\frac{di_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial \Omega_j}\frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial x_j}{\partial \chi_j}\frac{d\chi_j}{dt} = 0;$$

$$\frac{\partial y_j}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial e_j}\frac{de_j}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial i_j}\frac{di_j}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial \Omega_j}\frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial y_j}{\partial \chi_j}\frac{d\chi_j}{dt} = 0;$$

$$\frac{\partial z_j}{\partial a_j}\frac{da_j}{dt} + \frac{\partial z_j}{\partial e_j}\frac{de_j}{dt} + \frac{\partial z_j}{\partial i_j}\frac{di_j}{dt} + \frac{\partial z_j}{\partial \Omega_j}\frac{d\Omega_j}{dt} + \frac{\partial z_j}{\partial \omega_j}\frac{d\omega_j}{dt} + \frac{\partial z_j}{\partial \chi_j}\frac{d\chi_j}{dt} = 0. \qquad (11)$$

Отметим, что выполнение условий (10), (11) означает, что возмущенные скорости тел в любой момент времени t равняются частным производным по времени невозмущенных решений (4), в которых орбитальные элементы $a_j(t)$, $e_j(t)$, $i_j(t)$, $\Omega_j(t)$, $\omega_j(t)$, $\tau_j(t)$ равняются их значениям в тот же момент времени t. Такие мгновенные орбитальные элементы известны как оскулирующие элементы (см. [1]), а невозмущенная траектория, соответствующая орбитальным элементам $a_j(t)$, $e_j(t)$, $i_j(t)$, $\Omega_j(t)$, $\omega_j(t)$, $\tau_j(t)$, в каждый момент времени касается истинной орбиты.

Используя решения (4) и выполняя стандартные, но довольно громоздкие символьные преобразования с применением встроенных функций D, $Expand$, $Replace$, $Simplify$, $Collect$, $Coefficient$, $Solve$ (см. [24, 26, 28, 32, 34]), находим решение системы (10), (11) и получаем $6n$ дифференциальных уравнений, определяющих оскулирующие аналоги орбитальных элементов $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \chi_j$ для каждого из тел P_j, $(j = 1, 2, ..., n)$ в виде

$$\dot{a}_j = \frac{2\sqrt{a_j}}{\sqrt{\mu_{j0}}}\frac{\partial W_j}{\partial \chi_j};$$

$$\dot{e}_j = \frac{1}{e_j\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\left((1 - e_j^2)\frac{\partial W_j}{\partial \chi_j} - \sqrt{1 - e_j^2}\frac{\partial W_j}{\partial \omega_j}\right);$$

$$\dot{i}_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_{j0}a_j(1 - e_j^2)}}\left(\cot i_j\frac{\partial W_j}{\partial \omega_j} - \frac{1}{\sin i_j}\frac{\partial W_j}{\partial \Omega_j}\right);$$

$$\dot{\Omega}_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_{j0}a_j(1 - e_j^2)}\sin i_j}\frac{\partial W_j}{\partial i_j};$$

$$\dot{\omega}_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\left(\frac{\sqrt{1 - e_j^2}}{e_j}\frac{\partial W_j}{\partial e_j} - \frac{\cot i_j}{\sqrt{1 - e_j^2}}\frac{\partial W_j}{\partial i_j}\right);$$

$$\dot{\chi}_j = -\frac{2\sqrt{a_j}}{\sqrt{\mu_{j0}}}\frac{\partial W_j}{\partial a_j} - \frac{1 - e_j^2}{e_j\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\frac{\partial W_j}{\partial e_j}. \qquad (12)$$

Система (12) известна в литературе как планетарные уравнения Лагранжа (см. [1, 2]). Заметим, что возмущающие функции W_j, которые определяются выражениями (3), при подстановке в уравнения (12) должны быть выражены через орбитальные элементы $a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, \chi_j$. Для этого достаточно подставить решения (4) в выражение (3) и выполнить необходимые символьные вычисления, учитывая уравнение (8).

Как следует из выражений (3)–(5), возмущающие функции W_j зависят от переменных a_j явно, поскольку декартовы координаты тел (4) пропорциональны a_j (см. (5)), а также неявно, так как эксцентрические аномалии E_j также зависят от a_j (см. (6), (8)). Чтобы избавиться от такой неявной зависимости и упростить дальнейшие вычисления, вместо переменной χ_j будем использовать среднюю аномалию M_j, определяемую уравнением (8). Тогда частную производную возмущающей функции W_j по переменной a_j можно представить в виде

$$\frac{\partial W_j}{\partial a_j} = \left(\frac{\partial W_j}{\partial a_j}\right) + \frac{\partial W_j}{\partial M_j}\frac{\partial M_j}{\partial a_j}, \tag{13}$$

где выражение в скобках в правой части (13) означает часть W_j, зависящую от a_j явно. Из уравнения (8) следует также равенство

$$\frac{\partial W_j}{\partial \chi_j} = \frac{\partial W_j}{\partial M_j}. \tag{14}$$

Вычисляя производную средней аномалии M_j по времени с учетом (8), (13), (14), вместо последнего уравнения системы (12) получаем уравнение

$$\dot{M}_j = \frac{\sqrt{\mu_{j0}}}{a_j^{3/2}\gamma_j^2(t)} - \frac{2\sqrt{a_j}}{\sqrt{\mu_{j0}}}\left(\frac{\partial W_j}{\partial a_j}\right) - \frac{1-e_j^2}{e_j\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\frac{\partial W_j}{\partial e_j}, \tag{15}$$

где $W_j = W_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j, t)$. При этом первые два уравнения в (12) принимают вид

$$\dot{a}_j = \frac{2\sqrt{a_j}}{\sqrt{\mu_{j0}}}\frac{\partial W_j}{\partial M_j},$$

$$\dot{e}_j = \frac{1}{e_j\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\left((1-e_j^2)\frac{\partial W_j}{\partial M_j} - \sqrt{1-e_j^2}\frac{\partial W_j}{\partial \omega_j}\right). \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения для орбитальных элементов i_j, Ω_j, ω_j системы (12) не изменяются.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВОЗМУЩАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Получаемые в общем случае выражения для возмущающих функций $W_j(a_j, e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j, M_j, t)$ очень громоздки. Поэтому далее будем предполагать, что во время движения выполняются условия $i_j \ll 1$ и $e_j \ll 1$, т. е. тела движутся вблизи экваториальной плоскости по возмущенным квазиконическим сечениям с малым эксцентриситетом. Такие случаи часто встречаются в небесной механике (см. [1, 2]).

В случае $i_j \ll 1$ и $e_j \ll 1$ уравнения возмущенного движения (12), (15), (16) можно упростить, заменяя возмущающие функции W_j их соответствующими разложениями в степенные ряды по переменным i_j и e_j (см. [2]). Следует отметить, что разложение возмущающих функций W_j в ряды требует выполнения довольно громоздких символьных вычислений и представляет собой нетривиальную задачу. Далее приведем весьма эффективный метод ее решения с помощью системы компьютерной алгебры *Wolfram Mathematica*.

Поскольку декартовы координаты тел (4) выражаются через эксцентрические аномалии E_j, которые определяются уравнениями (8), сначала получим выражение для эксцентрической аномалии E_j в виде сходящегося при $e_j \ll 1$ степенного ряда (см. [2]):

$$\begin{gathered} E_j = M_j + e_j \sin M_j + \frac{e^2}{2}\sin(2M_j) - \\ -\frac{e^3}{8}\left(\sin M_j - 3\sin(3M_j)\right) + \ldots. \end{gathered} \tag{17}$$

Разложения (17) получены с помощью встроенной функции $Series$ (см. [34]) с точностью до третьего порядка, которая существенно упрощает вычисления и позволяет производить разложения выражений в степенные ряды с любой требуемой точностью (см. [34]). Для получения коэффициентов разложения (17), например, с точностью до n-го порядка по e_j можно использовать функцию $solE[n]$, записанную на языке *Wolfram Mathematica*:

$$solE[n\_] := w - e_j\, Sin[w] - M_j \;/.\; w \to$$

$$Sum[e_j^k w_k, \{k, 0, n\}] \;//Series[\#, \{e_j, 0, n\}]\& \;//$$

$$Normal \;//\; Collect[\#, e_j, Simplify]\&\;;$$

Выполнение команды $solE[4]$, например, приводит к результату

$$-M_j + w_0 + e_j(-Sin[w_0] + w_1)+$$

$$+e_j^2(-Cos[w_0]w_1 + w_2)+$$

$$+e_j^3(\frac{1}{2}Sin[w_0]w_1^2 - Cos[w_0]w_2 + w_3)+$$

$$+e_j^4(\frac{1}{6}Cos[w_0]w_1^3 + Sin[w_0]w_1w_2-$$

$$-Cos[w_0]w_3 + w_4).$$

Выделяя в полученном выражении с помощью функции $Coefficient$ коэффициенты при e_j^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений, из которой последовательно находим коэффициенты w_k разложения (17).

Поскольку увеличение точности вычислений приводит ко все более громоздким символьным выражениям, далее ограничимся вычислениями с точностью до второго порядка по переменным e_j и i_j. Используя (17), находим

$$\cos E_j = \cos M_j - e_j \sin^2 M_j - \frac{3e_j^2}{2}\cos M_j \sin^2 M_j,$$

$$\sin E_j = \sin M_j + \frac{e_j}{2}\sin(2M_j) + \frac{e_j^2}{8}\left(3\sin(3M_j) - \sin M_j\right). \tag{18}$$

Подставляя разложения (18) в (4), (5) и выполняя необходимые подстановки и разложения, запишем выражения (4) для декартовых координат тел P_j с точностью до второго порядка по переменным e_j и i_j в виде

$$x_j = \gamma_j a_j \Bigg(\cos(M_j + \omega_j + \Omega_j) - \frac{e_j}{2}(3\cos(\omega_j + \Omega_j) - \cos(2M_j + \omega_j + \Omega_j)) + \frac{e_j^2}{8}(\cos(M_j - \omega_j - \Omega_j) - 4\cos(M_j + \omega_j + \Omega_j) + 3\cos(3M_j + \omega_j + \Omega_j)) + \frac{i_j^2}{4}(\cos(M_j + \omega_j - \Omega_j) - \cos(M_j + \omega_j + \Omega_j)\Bigg);$$

$$y_j = \gamma_j a_j \Bigg(\sin(M_j + \omega_j + \Omega_j) - \frac{e_j}{2}(3\sin(\omega_j + \Omega_j) - \sin(2M_j + \omega_j + \Omega_j)) - \frac{e_j^2}{8}(\sin(M_j - \omega_j - \Omega_j) + 4\sin(M_j + \omega_j + \Omega_j) - 3\sin(3M_j + \omega_j + \Omega_j)) - \frac{i_j^2}{4}(\sin(M_j + \omega_j - \Omega_j) + \sin(M_j + \omega_j + \Omega_j)\Bigg);$$

$$z_j = \gamma_j a_j(\sin(M_j + \omega_j) - \frac{1}{2}e_j i_j(3\sin\omega_j - \sin(2M_j + \omega_j)). \tag{19}$$

Используя (19) и применяя функцию *Series*, получаем следующие выражения, которые будут использованы далее при вычислении разложений возмущающих функций W_j (см. (3)):

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} = a_i\gamma_i(1 - e_j \cos M_j + e_i^2 \sin^2 M_i), \tag{20}$$

$$r_{ij} = \sqrt{r_i^2 + r_j^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j} = \Delta_{ij} - \frac{a_i\gamma_i e_i}{2\Delta_{ij}}(2a_i\gamma_i\cos(\lambda_i - \omega_i - \Omega_i) + a_j\gamma_j(\cos(2\lambda_i - \lambda_j - \omega_i - \Omega_i) - 3\cos(\lambda_j - \omega_i - \Omega_i))) - \frac{a_j\gamma_j e_j}{2\Delta_{ij}}(2a_j\gamma_j\cos(\lambda_j - \omega_j - \Omega_j) + a_i\gamma_i(\cos(\lambda_i - 2\lambda_j + \omega_j + \Omega_j) - 3\cos(\lambda_i - \omega_j - \Omega_j))) + \frac{a_i a_j\gamma_i\gamma_j}{2\Delta_{ij}}(\sin(\lambda_i - \Omega_i)\sin(\lambda_j - \Omega_i)i_i^2 + \sin(\lambda_i - \Omega_j)\sin(\lambda_j - \Omega_j)i_j^2 - 2\sin(\lambda_i - \Omega_i)\sin(\lambda_j - \Omega_j)i_i i_j) + \frac{a_i\gamma_i e_i^2}{8\Delta_{ij}}(a_i\gamma_i(6 - 2\cos(2\lambda_i - 2\omega_i - 2\Omega_i)) + a_j\gamma_j(4\cos(\lambda_i - \lambda_j) - 3\cos(3\lambda_i - \lambda_j - 2\omega_i - 2\Omega_i) - \cos(\lambda_i + \lambda_j - 2\omega_i - 2\Omega_i))) + \frac{a_j\gamma_j e_j^2}{8\Delta_{ij}}(a_j\gamma_j(6 - 2\cos(2\lambda_j - 2\omega_j - 2\Omega_j)) + a_i\gamma_i(4\cos(\lambda_i - \lambda_j) - 3\cos(\lambda_i - 3\lambda_j + 2\omega_j + 2\Omega_j) - \cos(\lambda_i + \lambda_j - 2\omega_j - 2\Omega_j))) + \frac{a_i a_j\gamma_i\gamma_j e_i e_j}{4\Delta_{ij}}(3\cos(2\lambda_i - \omega_i - \omega_j - \Omega_i - \Omega_j) + 3\cos(2\lambda_j - \omega_i - \omega_j - \Omega_i - \Omega_j) - 9\cos(\omega_i - \omega_j + \Omega_i - \Omega_j) - \cos(2\lambda_i - 2\lambda_j - \omega_i + \omega_j - \Omega_i + \Omega_j)) - \frac{a_i^2\gamma_i^2 e_i^2}{16\Delta_{ij}^3}(8a_i^2\gamma_i^2\cos^2(\lambda_i - \omega_i - \Omega_i) - 4a_i\gamma_i a_j\gamma_j(2\cos(\lambda_i - \lambda_j) - \cos(3\lambda_i - \lambda_j - 2\omega_i - 2\Omega_i) + 3\cos(\lambda_i + \lambda_j - 2\omega_i - 2\Omega_i)) + a_j^2\gamma_j^2(10 - 6\cos(2\lambda_i - 2\lambda_j) - 6\cos(2\lambda_i - 2\omega_i - 2\Omega_i) + \cos(4\lambda_i - 2\lambda_j - 2\omega_i - 2\Omega_i) + 9\cos(2\lambda_j - 2\omega_i - 2\Omega_i))) - \frac{a_j^2\gamma_j^2 e_j^2}{16\Delta_{ij}^3}(8a_j^2\gamma_j^2\cos^2(\lambda_j - \omega_j - \Omega_j) - 4a_i\gamma_i a_j\gamma_j(2\cos(\lambda_i - \lambda_j) - \cos(\lambda_i - 3\lambda_j + 2\omega_j + 2\Omega_j) + 3\cos(\lambda_i + \lambda_j - 2\omega_j - 2\Omega_j)) + a_i^2\gamma_i^2(10 - 6\cos(2\lambda_i - 2\lambda_j) - 6\cos(2\lambda_j - 2\omega_j - 2\Omega_j) + \cos(2\lambda_i - 4\lambda_j + 2\omega_j + 2\Omega_j) + 9\cos(2\lambda_i - 2\omega_j - 2\Omega_j))) + \frac{a_i a_j\gamma_i\gamma_j e_i e_j}{8\Delta_{ij}^3}(2a_i^2\gamma_i^2(3\cos(2\lambda_i - \omega_i - \omega_j - \Omega_i - \Omega_j) - \cos(2\lambda_j - \omega_i - \omega_j - \Omega_i - \Omega_j) + 3\cos(\omega_i - \omega_j + \Omega_i - \Omega_j) - \cos(2\lambda_i - 2\lambda_j - \omega_i + \omega_j - \Omega_i + \Omega_j)) + 2a_j^2\gamma_j^2(3\cos(2\lambda_j - \omega_i - \omega_j - \Omega_i - \Omega_j) - \cos(2\lambda_i - \omega_i - \omega_j - \Omega_i - \Omega_j) + 3\cos(\omega_i - \omega_j + \Omega_i - \Omega_j) - \cos(2\lambda_i - 2\lambda_j - \omega_i + \omega_j - \Omega_i + \Omega_j)) +$$

$$+a_i\gamma_i a_j\gamma_j(3\cos(3\lambda_i-\lambda_j-\omega_i-\omega_j-\Omega_i-\Omega_j)-$$

$$-14\cos(\lambda_i+\lambda_j-\omega_i-\omega_j-\Omega_i-\Omega_j)-$$

$$-9\cos(\lambda_i-\lambda_j+\omega_i-\omega_j+\Omega_i-\Omega_j)-$$

$$-\cos(3\lambda_i-3\lambda_j-\omega_i+\omega_j-\Omega_i+\Omega_j)+$$

$$+2\cos(\lambda_i-\lambda_j-\omega_i+\omega_j-\Omega_i+\Omega_j)+$$

$$+3\cos(\lambda_i-3\lambda_j+\omega_i+\omega_j+\Omega_i+\Omega_j))), \qquad (21)$$

где

$$\Delta_{ij}=\left(a_i^2\gamma_i^2+a_j^2\gamma_j^2-2a_ia_j\gamma_i\gamma_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)\right)^{1/2}, \quad (22)$$

а вместо средней аномалии M_j введена средняя долгота $\lambda_j = M_j + \omega_j + \Omega_j$.

Используя (19)–(21), находим разложения выражений $1/r_{ij}$, $(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)/r_j^3$ которые описывают возмущения, связанные с гравитационным взаимодействием тел P_i и P_j (см. (3)). Поскольку получаемое выражение весьма громоздко, мы его не приводим. Отметим только, что в результате получается многочлен второго порядка относительно переменных e_j, i_j, коэффициенты которого являются периодическими функциями средних долгот λ_j и представляют собой рациональные выражения, в числителях которых содержатся тригонометрические функции, аргументы которых представляют собой линейные комбинации переменных $\lambda_i, \lambda_j, \omega_i, \omega_j, \Omega_i, \Omega_j$, $(i, j = 1, 2, ..., n)$, а знаменатели содержат выражения Δ_{ij}, Δ_{ij}^3, Δ_{ij}^5.

Поскольку Δ_{ij} является периодической функцией переменных λ_i, λ_j (см. (22)), выражения $1/\Delta_{ij}$, $1/\Delta_{ij}^3$, $1/\Delta_{ij}^5$ в разложениях возмущающих функций можно заменить их разложениями в ряды Фурье:

$$\frac{1}{\Delta_{ij}}=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_k\cos\left(k(\lambda_i-\lambda_j)\right);$$

$$\frac{1}{\Delta_{ij}^3}=\frac{1}{2a_ia_j\gamma_i\gamma_j}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}B_k\cos\left(k(\lambda_i-\lambda_j)\right);$$

$$\frac{1}{\Delta_{ij}^5}=\frac{1}{2a_i^2a_j^2\gamma_i^2\gamma_j^2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}C_k\cos\left(k(\lambda_i-\lambda_j)\right), \qquad (23)$$

где A_k, B_k, C_k – известные коэффициенты Лапласа (см. [2, 31]).

5. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕКОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОРБИТАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Подставляя в (3) разложения выражений $1/r_{ij}$, $(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j)/r_j^3, r_j, r_j^2$ и выполняя необходимые символьные вычисления, получаем довольно громоздкое выражение для возмущающих функций W_j в виде многочлена второго порядка относительно орбитальных элементов e_j, i_j, которое мы здесь не приводим. Поскольку нас интересует эволюция орбитальных параметров тел P_j на больших интервалах времени, короткопериодические возмущения, связанные с орбитальным движением тел, следует устранить путем усреднения возмущающих функций W_j по средним долготам λ_j (см. [2, 22]). Усреднение многочленов W_j, приводящее к вековой части $W_j^{(sec)}$ возмущающих функций, сводится к вычислению интегралов

$$W_j^{(sec)}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}d\lambda_1 ... \int_0^{2\pi}d\lambda_n W_j. \qquad (24)$$

Поскольку возмущающие функции W_j представляют собой суммы большого числа слагаемых, каждое из которых может зависеть не более чем от двух средних долгот λ_i и λ_j (см. (3), (19)–(23)), интеграл (24) сводится к двукратному интегралу по переменным λ_i и λ_j.

В результате получим следующие вековые части возмущающих функций:

$$W_j^{(sec)}=G\sum_{s=1}^{j-1}m_s\left(\frac{A_0^{sj}}{2}+\frac{1}{2}\Pi_{11}^{sj}e_s^2+\frac{1}{2}\Pi_{22}^{sj}e_j^2+\right.$$

$$+\Pi_{12}^{sj}e_se_j\cos(\omega_s-\omega_j+\Omega_s-\Omega_j)-$$

$$\left.-\frac{1}{8}B_1^{sj}(i_s^2+i_j^2-2i_si_j\cos(\Omega_s-\Omega_j)\right)+$$

$$+G\sum_{s=j+1}^{n}m_s\left(\frac{A_0^{js}}{2}+\frac{1}{2}\Pi_{11}^{js}e_j^2+\frac{1}{2}\Pi_{22}^{js}e_s^2+\right.$$

$$+\Pi_{12}^{js}e_je_s\cos(\omega_j-\omega_s+\Omega_j-\Omega_s)-$$

$$\left.-\frac{1}{8}B_1^{js}(i_j^2+i_s^2-2i_ji_s\cos(\Omega_j-\Omega_s)\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\ddot{\gamma}_j\gamma_ja_j^2\left(1+\frac{3}{2}e_j^2\right)+\frac{\dot{m}_j}{m_j}V_j^{(r)}a_j\gamma_j\left(1+\frac{1}{2}e_j^2\right), \quad (25)$$

где $V_j^{(r)}$ – радиальная составляющая относительной скорости $\vec{V}_j$ частиц, покидающих тело P_j или осаждающихся на нем, и приняты следующие обозначения:

$$\Pi_{11}^{js}=-\frac{3\alpha_{js}}{4}B_0^{js}-\frac{1}{2}B_1^{js}+\frac{15+6\alpha_{js}^2}{8}C_0^{js}-\frac{3\alpha_{js}}{2}C_1^{js}-\frac{9}{8}C_2^{js};$$

$$\Pi_{12}^{js} = \frac{1}{8}(9B_0^{js} + B_2^{js}) - \frac{9(1+\alpha_{js}^2)}{8\alpha_{js}}C_0^{js} + $$
$$+\frac{21}{16}C_1^{js} + \frac{3(1+\alpha_{js}^2)}{8\alpha_{js}}C_2^{js} + \frac{3}{16}C_3^{js};$$
$$\Pi_{22}^{js} = -\frac{3}{4\alpha_{js}}B_0^{js} - \frac{1}{2}B_1^{js} + \frac{15\alpha_{js}^2+6}{8\alpha_{js}^2}C_0^{js} -$$
$$-\frac{3}{2\alpha_{js}}C_1^{js} - \frac{9}{8}C_2^{js}. \qquad (26)$$

Параметр
$$\alpha_{sj} = \frac{a_s\gamma_s}{a_j\gamma_j} < 1,$$
поскольку предполагается, что при $(1 \le s < j)$ траектория планеты P_s располагается внутри траектории планеты P_j и потому планеты P_s являются внутренними. При $(j+1 \le s \le n)$ траектория планеты P_j располагается внутри траектории планеты P_s и потому планеты P_j являются внутренними и $\alpha_{js} < 1$. Выражения (25), (26) содержат коэффициенты Лапласа (см. [2]), определяемые соотношениями
$$A_0^{js} = \frac{2}{\pi a_s\gamma_s}\int_0^{\pi}\frac{d\lambda}{(1+\alpha_{js}^2 - 2\alpha_{js}\cos\lambda)^{1/2}};$$
$$B_p^{js} = \frac{2\alpha_{js}}{\pi(a_s\gamma_s)}\int_0^{\pi}\frac{\cos(p\lambda)d\lambda}{(1+\alpha_{js}^2 - 2\alpha_{js}\cos\lambda)^{3/2}};$$
$$C_p^{js} = \frac{2\alpha_{js}^2}{\pi(a_s\gamma_s)}\int_0^{\pi}\frac{\cos(p\lambda)d\lambda}{(1+\alpha_{js}^2 - 2\alpha_{js}\cos\lambda)^{5/2}},$$
где $p = 0,1,2,3$. Заметим, что с помощью системы *Wolfram Mathematica* приведенные выше интегралы вычисляются точно и выражаются через эллиптические интегралы первого и второго рода.

Эволюционные уравнения, определяющие поведение орбитальных параметров на больших интервалах времени, получаются из уравнений движения (12), (16), если вместо возмущающих функций W_i подставить их усредненные разложения (25) и заменить частную прозводную возмущающей функции по средней аномалии M_i соответствующей частной производной по средней долготе λ_i. Поскольку $W_i^{(sec)}$ не зависят от средних долгот λ_i, соответствующие производные обращаются в нуль и, как результат, вековые возмущения аналогов больших полуосей a_i $(i = 1,2,...,n)$ с течением времени не изменяются.

Вековые возмущения орбитальных элементов $e_j, i_j, \Omega_j, \omega_j$ определяются как решения следующей системы $4n$ дифференциальных уравнений:

$$\frac{de_j}{dt} = -\sum_{s=1}^{j-1}\frac{Gm_se_s}{\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\Pi_{12}^{sj}\sin(\omega_s - \omega_j + \Omega_s - \Omega_j) +$$
$$+\sum_{s=j+1}^{n}\frac{Gm_se_s}{\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\Pi_{12}^{js}\sin(\omega_j - \omega_s + \Omega_j - \Omega_s);$$
$$\frac{di_j}{dt} = -\sum_{s=1}^{j-1}\frac{Gm_si_s}{4\sqrt{\mu_{j0}a_j}}B_1^{sj}\sin(\Omega_s - \Omega_j) +$$
$$+\sum_{s=j+1}^{n}\frac{Gm_si_s}{4\sqrt{\mu_{j0}a_j}}B_1^{js}\sin(\Omega_j - \Omega_s);$$
$$\frac{d\Omega_j}{dt} = -\sum_{s=1}^{j-1}\frac{Gm_s}{4\sqrt{\mu_{j0}a_j}}B_1^{sj}\left(1 - \frac{i_s}{i_j}\cos(\Omega_s - \Omega_j)\right) -$$
$$-\sum_{s=j+1}^{n}\frac{Gm_s}{4\sqrt{\mu_{j0}a_j}}B_1^{js}\left(1 - \frac{i_s}{i_j}\cos(\Omega_j - \Omega_s)\right);$$
$$\frac{d\omega_j}{dt} = -\frac{3a_j^{3/2}}{2\sqrt{\mu_{j0}}}\gamma_j\ddot{\gamma}_j + \frac{\sqrt{a_j}}{\sqrt{\mu_{j0}}}\gamma_j\frac{\dot{m}_j}{m_j}V_j^{(r)} +$$
$$+\sum_{s=1}^{j-1}\frac{Gm_s}{\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\left(\Pi_{22}^{sj} + \frac{1}{4}B_1^{sj}\left(1 - \frac{i_s}{i_j}\cos(\Omega_s - \Omega_j)\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{e_s}{e_j}\Pi_{12}^{sj}\cos(\omega_s - \omega_j + \Omega_s - \Omega_j)\right) +$$
$$+\sum_{s=j+1}^{n}\frac{Gm_s}{\sqrt{\mu_{j0}a_j}}\left(\Pi_{11}^{js} + \frac{1}{4}B_1^{js} - \left(1 - \frac{i_s}{i_j}\cos(\Omega_j - \Omega_s)\right) +\right.$$
$$\left. + \frac{e_s}{e_j}\Pi_{12}^{js}\cos(\omega_j - \omega_s + \Omega_j - \Omega_s)\right). \qquad (27)$$

Отметим, что массы тел $m_j(t)$, а также отношения масс $\gamma_j(t)$ и параметры α_{js}, $(j, s = 1,2,\ldots,n;$ $j < s)$ являются заданными функциями времени, что приводит к зависимости от времени коэффициентов Лапласа $B_0^{js}, B_1^{js}, B_2^{js}, C_0^{js}, C_1^{js}, C_2^{js}, C_3^{js}$. Поэтому коэффициенты полученной системы (27) из $4n$ линейных дифференциальных уравнений являются довольно сложными функциями времени и записать общее решение этой системы в символьной форме не представляется возможным. Однако эту систему можно решать численно, задавая различные законы изменения масс тел и исследуя их влияние на вековые возмущения орбитальных элементов.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследуются вековые возмущения орбитальных элементов многопланетной системы из $(n+1)$ тел переменной массы в случае, когда масса центрального тела-звезды изменяется изотропно, а массы планет могут изменяться неизотропно с различными скоростями, что приводит к появлению реактивных сил.

Все тела считаются материальными точками, взаимодействующими друг с другом в соответствии с законом всемирного тяготения. Поскольку дифференциальные уравнения движения являются неинтегрируемыми, проблема исследуется методами теории возмущений, причем в качестве первого приближения используется точное решение задачи двух тел с переменными массами, описывающее апериодическое движение тел по квазиконическим сечениям. Предполагается, что тела $P_1, ..., P_n$ движутся вокруг центрального тела P_0 по квазиэллиптическим орбитам таким образом, что их орбиты не пересекаются. Подробно описаны основные типы символьных вычислений, связанных с разложением возмущающих функций в степенные ряды, и получены выражения для возмущающих функций с точностью до второго порядка по эксцентриситетам и наклонениям орбит, которые предполагаются малыми. Получены эволюционные уравнения, определяющие вековые возмущения аналогов орбитальных элементов, которые допускают численное интегрирование при заданных законах изменения масс тел.

Отметим, что системы компьютерной алгебры, например *Wolfram Mathematica*, позволяют выполнить все описанные символьные вычисления с учетом членов более высокого порядка по малым параметрам. Поскольку получаемые при этом выражения становятся все более громоздкими, в данной работе мы ограничились учетом только членов второго порядка.

7. БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования финансируются Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (Грант № AP14869472).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рой А.Э.* Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544 с.
2. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика Солнечной системы / Пер. с англ. под ред. И.И. Шевченко. М.: Физматлит, 2010. 588 с.
3. *Laskar J.* Chaotic diffusion in the Solar System. Icarus. 2008. V. 196(1). P. 1–15.
4. *Zeebe R.E.* Dynamic stability of the solar system: statistically inconclusive results from ensemble integrations. The Astrophysical Journal. 2015. V. 798:8. P. 1–13.
5. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
6. *Celletti A., Chierchia L.* KAM stability for a three-body problem of our Solar System. Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Physik ZAMP. 2006. V. 57. P. 33–41.
7. *Prokopenya A.N.* Determination of the stability boundaries for the Hamiltonian systems with periodic coeffficients. Mathematical Modelling and Analysis. 2005. V. 10(2). P. 191–204.
8. *Prokopenya A.N.* Computing the stability boundaries for the Lagrange triangular solutions in the elliptic restricted three-body problem. Mathematical Modelling and Analysis. 2006. V. 11(1). P. 95–104.
9. *Giorgilli A., Locatelli U., Sansottera M.* Secular dynamics of a planar model of the Sun-Jupiter-Saturn-Uranus system; effective stability in the light of Kolmogorov and Nekhoroshev theories. Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22(1). P. 54–77.
10. *Perminov A.S., Kuznetsov E.D.* The implementation of Hori–Deprit method to the construction averaged planetary motion theory by means of Computer Algebra System Piranha. Mathematics in Computer Science. 2020. V. 14. P. 305–316.
11. *Прокопеня А.Н.* Некоторые алгоритмы символьных вычислений в исследованиях проблем космической динамики. Программирование. 2006. Т. 32(2). С. 16–22.
12. *Прокопеня А.Н.* Символьные вычисления в исследованиях устойчивости решений линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Программирование. 2007. Т. 33(2). С. 9–16.
13. *Прокопеня А.Н.* Нормализация гамильтониана в ограниченной задаче многих тел методами компьютерной алгебры. Программирование. 2012. Т. 38(3). С. 65–78.
14. *Bruno A.D., Batkhin A.B.* Survey of eight modern methods of Hamiltonian mechanics. Axioms. 2021. V. 10:293. P. 1–32.
15. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Символьно-аналитические методы исследования положений равновесия спутника на круговой орбите. Программирование. 2021. Т. 47(2). С. 28–33.
16. *Гутник С.А., Сарычев В.А.* Символьные методы вычисления положений равновесия системы двух связанных тел на круговой орбите. Программирование. 2022. Т. 48(2). С. 16–22.
17. *Omarov T.B.* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy. – Nova Science Publ., New York, 2002. 260 p.
18. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of orbits in non-stationary stellar systems. Astronomical and Astrophysical Transactions. 2003. V. 22(2). P. 145–153.
19. *Eggleton P.* Evolutionary processes in binary and multiple stars. – Cambridge University Press, Cambridge, 2006. 332 p.
20. *Veras D.* Post-main-sequence planetary system evolution. Royal Society open science. 2016. V. 3. P. 150571.
21. *Berkovic L.M.* Gylden-Mescerski problem. Celestial Mechanics. 1981. V. 24. P. 407–429.
22. *Минглибаев М.Дж.* Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. – LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. 224 с.
23. *Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Evolution of the orbital-plane orientations in the two-protoplanet three-body problem with variable masses. Astronomy Reports. 2014. V. 58(9). P. 667–677.

24. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М.* Символьные вычисления в исследованиях проблемы трех тел с переменными массами. Программирование. 2014. Т. 40(2). С. 51–59.
25. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Beketauov B.A.* Secular perturbations of quasi-elliptic orbits in the restricted three-body problem with variable masses. International Journal of Non-Linear Mechanics. 2015. V. 73. P. 58–63.
26. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Маемерова Г.М., Иманова Ж.У.* Исследование ограниченной задачи трех тел с переменными массами методами компьютерной алгебры. Программирование. 2017. Т. 43(5). С. 18–23.
27. *Minglibayev M.Zh., Prokopenya A.N., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U.* Three-body problem with variable masses that change anisotropically at different rates. Mathematics in Computer Science. 2017. V. 11(3-4). P. 383–391.
28. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Шомшекова С.А.* Применение компьютерной алгебры в исследованиях двухпланетной задачи трех тел с переменными массами. Программирование. 2019. Т. 45(2). С. 58–65.
29. *Minglibayev M.Zh., Kosherbayeva A.B.* Differential equations of planetary systems. Reports of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. 2020. V. 2(330). P. 14–20.
30. *Ибраимова А.Т., Минглибаев М.Дж., Прокопеня А.Н.* Исследование вековых возмущений в ограниченной задаче трех тел переменной массы с применением компьютерной алгебры. Вычислительная математика и математическая физика. 2023. Т. 63(1). С. 154–164.
31. *Imanova Zh., Prokopenya A., Minglibayev M.* Modeling the evolution of the two-planetary three-body system of variable masses. Mathematical Modelling and Analysis. 2023. V. 28(4). P. 636–652.
32. *Прокопеня А.Н., Минглибаев М.Дж., Кошербаева А.Б.* Построение эволюционных уравнений в задаче многих тел с изотропно изменяющимися массами с применением компьютерной алгебры. Программирование. 2022. Т. 48(2). С. 53–62.
33. *Prokopenya A., Minglibayev M., Kosherbayeva A.* Modeling the dynamics of a multi-planetary system with anysotropic mass variation. In: L. Franco et al. (Eds.): Computational Science – ICCS 2024. Lecture Notes in Computer Science, vol. 14836. Springer, Cham, 2024. P. 181–196.
34. *Wolfram S.* An elementary introduction to the Wolfram Language. – Wolfram Media, Inc., 2016.

SYMBOLIC CALCULATIONS IN THE STUDY OF SECULAR PERTURBATIONS IN THE MANY-BODY PROBLEM WITH VARIABLE MASSES

A. N. Prokopenya[a], M. Zh. Minglibayev[b], and M. R. Saparova[b]

[a] *Warsaw University of Life Sciences, Warsaw, Poland*
Nowoursynowska 166, Warsaw, 02-787 Poland
[b] *Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*
al-Farabi Ave. 71, Almaty, 050040 Republic of Kazakhstan

The problem of deriving differential equations determining secular perturbations of orbital elements in a multiplanetary system is considered in the case when the central star loses its mass isotropically, while the masses of the planets can change anisotropically, which leads to the appearance of reactive forces. As a model of a multiplanetary system, the classical problem of variable-mass bodies is used, when bodies move around the central star along quasi-elliptical non-intersecting orbits and interact with each other in accordance with the law of universal gravitation. It is assumed that the masses of the bodies change at different rates and the laws of mass change are considered to be arbitrary given functions of time. Differential equations of motion of bodies in osculating elements of aperiodic motion along quasi-conical orbits corresponding to the planetary Lagrange equations are derived. An algorithm for calculating the perturbing functions in the form of power series in small parameters and the derivation of differential equations determining secular perturbations of orbital elements are discussed. All necessary symbolic calculations are performed using the *Wolfram Mathematica* computer algebra system.

Keywords: many-body problem, variable mass, equations of motion, reactive forces, secular perturbations, Wolfram Mathematica

REFERENCES

1. *Roy A.E.* Orbital Motion, Bristol: Hilger, 1978.
2. *Murray K.D., Dermot S.F.* Solar System Dynamics, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
3. *Laskar J.* Chaotic diffusion in the Solar System, Icarus, 2008, vol. 196, no. 1, pp. 1–15.
4. *Zeebe R.E.* Dynamic stability of the solar system: statistically inconclusive results from ensemble integrations, Astrophys. J., 2015, vol. 798, no. 8, pp. 1–13.
5. *Makkeev A.P.* Libration Points in Celestil Mechanics and Space Dynamics, Moscow: Nauka, 1978 [in Russian].
6. *Celletti A., Chierchia L.* KAM stability for a three-body problem of our Solar Syste, Z. Angew. Math. Phys., 2006, vol. 57, pp. 33–41.
7. *Prokopenya A.N.* Determination of the stability boundaries for the Hamiltonian systems with periodic coefficients, Math. Modell. Anal., 2005, vol. 10, no. 2. pp. 191–204.
8. *Prokopenya A.N.* Computing the stability boundaries for the Lagrange triangular solutions in the elliptic restricted three-body problem. Math. Modell. Anal., 2006, vol. 11, no. 1, pp. 95–104.
9. *Giorgilli A., Locatelli U., Sansottera M.* Secular dynamics of a planar model of the Sun–Jupiter–Saturn–Uranus system: Effective stability in the light of Kolmogorov and Nekhoroshev theories, Regular Chaotic Dynam., 2017, vol. 22, no. 1, pp. 54–77.
10. *Perminov A.S., Kuznetsov E.D.* The implementation of Hori–Deprit method to the construction averaged planetary motion theory by means of computer algebra system Piranha, Math. Comput. Sci., 2020, vol. 14, pp. 305–316.
11. *Prokopenya A.N.* Some symbolic computation algorithms in cosmic dynamics problems, Program. Comput. Software, 2006, vol. 32, no. 2, pp. 71–76.
12. *Prokopenya A.N.* Symbolic Computation in Studying Stability of Solutions of Linear Differential Equations with Periodic Coefficients, Program. Comput. Software, 2007, vol. 33, no. 2, pp. 60–66.
13. *Prokopenya A.N.* Hamiltonian normalization in the restricted many-body problem by computer algebra methods, Program. Comput. Software, 2012, vol. 38, no. 3, pp. 156–169.
14. *Bruno A.D., Batkhin A.B.* Survey of eight modern methods of Hamiltonian mechanics, Axioms, 2021, vol. 10, no. 293, pp. 1–32.
15. *Gutnik S.A., Sarychev V.A.* Symbolic-analytic methods for studying equilibrium orientations of a satellite on a circular orbit, Program. Comput. Software, 2021, vol. 47, no. 2, pp. 119–123.
16. *Gutnik S.A., Sarychev V.A.* Symbolic methods for studying the equilibrium orientations of a system of two connected bodies in a circular orbit, Program. Comput. Software, 2022, vol. 48, no. 2, pp. 73–79.
17. *Omarov T.B.* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy (New York, Nova Science, 2002).
18. *Bekov A.A., Omarov T.B.* The theory of orbits in non-stationary stellar systems, Astron. Astrophys. Trans., 2003, vol. 22, no. 2, pp. 145–153.
19. *Eggleton P.* Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars, Cambridge: Cambridge University Press, 2006.
20. *Veras D.* Post-main-sequence planetary system evolution, R. Soc. Open Sci., 2016, vol. 3, p. 150571.
21. *Berkovic L.M.* Gylden–Mescerski problem, Celest. Mech., 1981, vol. 24, pp. 407–429.
22. *Minglibayev M.Zh.* Dynamics of Gravitating Bodies with Variable Size and Mass, Lambert, 2012.
23. *Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Evolution of the orbital-plane orientations in the two-protoplanet three-body problem with variable masses, Astron. Rep., 2014, vol. 58, no. 9, pp. 667–677.
24. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M.* Symbolic calculations in studying the problem of three bodies with variable masses, Program. Comput. Software, 2014, vol. 40, no. 2, pp. 79–85.
25. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Beketauov B.A.* Secular perturbations of quasi-elliptic orbits in the restricted three-body problem with variable masses, Int. J. Non-Linear Mech., 2015, vol. 73, pp. 58–63.
26. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U.* Investigation of the restricted problem of three bodies of variable masses using computer algebra, Program. Comput. Software, 2017, vol. 43, no. 5, pp. 289–293.
27. *Minglibayev M.Zh., Prokopenya A.N., Mayemerova G.M., Imanova Zh.U.* Three-body problem with variable masses that change anisotropically at different rates, Math. Comput. Sci., 2017, vol. 11, no. 3–4, pp. 383–391.
28. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Shomshekova S.A.* Applications of computer algebra in the study of the two-planet problem of three bodies with variable masses, Program. Comput. Software, 2019, vol. 45, no. 2, pp. 73–80.
29. *Minglibayev M.Zh., Kosherbayeva A.B.* Differential equations of planetary systems, Rep. Nat. Acad. Sci. Kazakhstan, 2020, vol. 2, no. 330, pp. 14–20.
30. *Ibraimova A.T., Minglibayev M.Zh., Prokopenya A.N.* Study of secular perturbations in the restricted three-body problem of variable masses using computer algebra, Comput. Math. Math. Phys., 2023, vol. 63, no. 1, pp. 115–125.
31. *Imanova Zh., Prokopenya A., Minglibayev M.* Modeling the evolution of the two-planetary three-body system of variable masses, Math. Model. Anal., 2023, vol. 28, no. 4, pp. 636–652.
32. *Prokopenya A.N., Minglibayev M.Zh., Kosherbayeva A.B.* Derivation of evolutionary equations in the many-body problem with isotropically varying masses using computer algebra, Program. Comput. Software, 2022, vol. 48, no. 2, pp. 107–115.
33. *Prokopenya A., Minglibayev M., Kosherbayeva A.* Modeling the dynamics of a multi-planetary system with anysotropic mass variation, Computational Science – ICCS, 2024, Franco L. et al. (Eds.). Lect. Notes Comput. Sci., vol. 14836, Springer, Cham, 2024, pp. 181–196.
34. *Wolfram S.* An Elementary Introduction to the Wolfram Language, Wolfram Media, Inc., 2016.