

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМИЧЕСКОГО И ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ КОМПАРТМЕНТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© 2025 г. А. А. Петров^{a,*}, О. В. Дружинина^{b,**}, О. Н. Масина^{a,***},
А. В. Демидова^{c,****}

^aЕлецкий государственный университет им. И. А. Бунина

399770 Елец, Липецкая обл., ул. Коммунаров, д. 28, Россия

^bФедеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской академии наук

119333 Москва, ул. Вавилова, д. 44, к. 2, Россия

^cРоссийский университет дружбы народов

117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Россия

*E-mail: xeal91@yandex.ru

**E-mail: ovdruz@mail.ru

***E-mail: olga121@inbox.ru

****E-mail: demidova-av@rudn.ru

Поступила в редакцию 10.08.2024 г.

После доработки 27.08.2024 г.

Принята к публикации 22.09.2024 г.

Изучение процессов распространения эпидемий и создание соответствующего алгоритмического и программного обеспечения для математического моделирования относятся к актуальному направлению исследований. Целью данной работы является разработка инструментария для символьных вычислений в задачах построения управляемых компартментальных моделей динамических систем. В качестве языка программирования используется язык Julia с применением библиотек научных вычислений. Разработан программный комплекс, который реализует функциональность для моделирования компартментальных систем на основе схем взаимодействий между компартментами. Построены и изучены управляемые компартментальные модели эпидемиологии, а именно, SIRU-модель, SEIRU-модель и SIDARTHEU-модель. Управляющие воздействия задаются в виде дополнительных правил, интенсивность перехода в которых является изменяющимся параметром. В разработанном программном обеспечении реализован предметно-ориентированный язык для построения компартментальных моделей на основе схемы взаимодействий. Предложен алгоритм имитационной реализации компартментальных моделей с учетом управления. Проведены вычислительные эксперименты по моделированию управляемых систем распространения эпидемий, выполнен сравнительный анализ траекторной динамики имитационных моделей и соответствующих дифференциальных моделей. Полученные результаты могут найти применение при решении задач моделирования эпидемиологических, экологических, физико-химических и других процессов на основе одношаговых взаимодействий.

Ключевые слова: управляемые компартментальные модели, динамические системы, компьютерная алгебра, алгоритм реализации имитационной модели, язык программирования Julia, программное обеспечение для символьных вычислений

DOI: 10.31857/S0132347425010043, EDN: DXNKAM

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследователями и инженерами уделяется значительное внимание решению задач, связанных с применением методов компьютерной алгебры для представления моделей

динамических систем в символьном виде [1–7]. Для решения указанных задач требуется разработка алгоритмов и программного обеспечения с привлечением языков программирования высокого уровня. Одним из таких языков является Julia [8, 9]. Выбор языка Julia позволяет использо-

вать возможности удобных и высокопроизводительных средств численных методов, математического моделирования и компьютерной алгебры. В частности, разработанный в [10] программный комплекс символьных вычислений на языке Julia продемонстрировал некоторые возможности конструирования компартментальных моделей на основе описания взаимодействий модельных компонентов.

К компартментальным моделям относятся многие модели, которые описывают распространение эпидемий. Построению и изучению моделей распространения эпидемий посвящены, в частности, работы [11–17]. Несмотря на многочисленные исследования в этом направлении, сохраняется необходимость рассмотрения обобщенных эпидемиологических моделей и анализа ранее не известных факторов в связи с распространением новых видов инфекционных заболеваний, а также с необходимостью расширения набора характеристик, влияющих на динамику распространения эпидемий.

Следует отметить важность добавления в описание компартментальных моделей элементов, связанных с управляющими воздействиями. В частности, для моделей эпидемиологии рассмотрение управляющих воздействий позволяет изучить возможное течение эпидемии с учетом регулирования и исследовать возможности снижения уровня заболеваемости. Изучение управляемых эпидемиологических моделей направлено на оценку эффективности применения регулирующих мер и на прогнозирование распространения болезней. Примеры управляемых моделей эпидемиологии рассмотрены в [18–27].

При решении задач построения и исследования управляемых моделей используются различные методы, в том числе методы оптимизации и интеллектуального анализа [7, 28–30]. Следует отметить, что в процессе изучения управляемых компартментальных моделей возникает необходимость разработки алгоритмов и создания программного обеспечения для глобальной параметрической оптимизации.

Настоящая работа посвящена разработке алгоритмического и программного обеспечения для символьных вычислений в задачах построения управляемых компартментальных моделей динамических систем. Структура статьи следующая. В разделе 2 приведено описание управляемых компартментальных моделей эпидемиологии, в частности, SIRU-модели, SEIRU-модели и SIDARTHEU-модели. Описание дано с точки зрения предметной области с учетом схем взаимодействий и основных компонентов. Разработан алгоритм имитационной

реализации многомерных компартментальных моделей. В разделе 3 дано описание специализированных модулей программного комплекса. Охарактеризованы особенности построения предметно-ориентированного языка для реализации моделей. Предложен подход к представлению компартментальных моделей на основе реализации алгоритмов в среде программирования Julia с помощью макросов. В разделе 4 представлены результаты разработки имитационной реализации компартментальных моделей. Описаны результаты вычислительных экспериментов и дан сравнительный анализ траекторной динамики в задачах построения и исследования моделей распространения эпидемий. В разделе 5 приведено обсуждение результатов.

2. СХЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ КОМПАРТМЕНТОВ ДЛЯ ЭПИДЕМИОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С УПРАВЛЕНИЕМ

В работе рассматриваются три вида эпидемиологических моделей: SIR-модель, SEIR-модель и SIDARTHE-модель. Указанные модели основаны на принципе бинарных взаимодействий между различными группами (компартаментами) субъектов, потенциально подверженных воздействию эпидемии. Исследуемые компартментальные модели принято использовать для описания распространения инфекционных заболеваний, таких как ОРВИ, грипп, COVID-19, ВИЧ/СПИД, туберкулез. Управляющие воздействия в моделях рассматриваются как такие дополнительные взаимодействия компартментов, интенсивность которых может быть изменена. Для эпидемиологических моделей с управлением соответственно приняты обозначения: SIRU-модель, SEIRU-модель, SIDARTHEU-модель.

Схема взаимодействий между компартаментами для SIRU-модели с учетом интенсивностей переходов α , β и u (переходов пациентов из одного компартмента в другой) приведена на рис. 1.

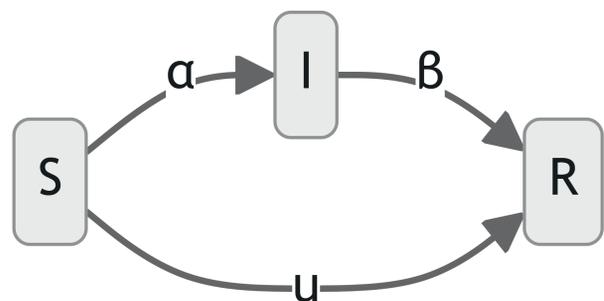


Рис. 1. Схема взаимодействий для SIRU-модели.

Обозначения компартментов на рис. 1 имеют следующий вид:

- S – количество восприимчивых к заболеванию людей;
- I – количество инфицированных людей на текущий момент;
- R – количество выздоровевших или невосприимчивых.

В модели SIRU рассматривается управление численностью S (восприимчивых) к инфицированию людей за счет профилактических мер и, соответственно, управление численностью R здоровых (невосприимчивых) людей. По сравнению с графом SIR-модели [10] в соответствующем графе появляется дополнительная взаимосвязь между S и R , отвечающая управлению.

С учетом интенсивностей переходов α, β и u модель SIRU может быть реализована посредством трехмерного дифференциального уравнения, которое имеет вид

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -i\alpha - us \\ -i\beta + i\alpha \\ i\beta + us \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} s \\ i \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

В виде схем, аналогичных приведенной на рис. 1 схеме, строятся более сложные эпидемиологические модели с управлением. В частности, схема четырехмерной модели SEIRU с учетом интенсивностей переходов α, β, γ, u представлена на рис. 2.

Согласно рис. 2, в сравнении с SIRU-моделью, для SEIRU-модели добавляется еще один компартмент, который означает скрыто инфицированных (подвергшихся) пациентов. С течением времени подвергшиеся пациенты переходят в компартмент инфицированных пациентов, а затем выздоравливают. Модель SEIRU может быть реализована с помощью дифференциального уравнения, которое имеет вид

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -su - e\alpha \\ -e\beta + e\alpha \\ e\beta - i\gamma \\ i\gamma + su \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} s \\ e \\ i \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

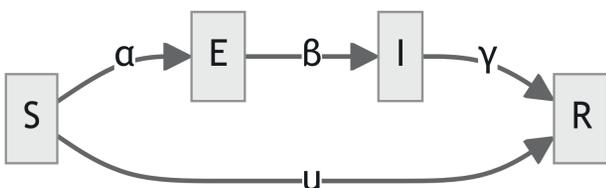


Рис. 2. Схема взаимодействий для SEIRU-модели.

Следует отметить, что SIR-модель и SEIR-модель являются относительно простыми и не учитывают ряда значимых взаимодействий в эпидемиологических системах. Для более точной оценки динамики эпидемиологических систем целесообразно использовать комплексные модели, например модель SIDARTHEU. Схема управляемой модели SIDARTHEU с учетом интенсивностей переходов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \epsilon, \lambda, \theta, \mu, \kappa, \eta, \rho, \nu, \xi, \tau, \sigma, u_1, u_2, u_3$ модели приведена на рис. 3.

Обозначения компартментов в модели SIDARTHEU (за исключением компартмента S) отличаются от моделей SIRU и SEIRU и имеют следующий вид:

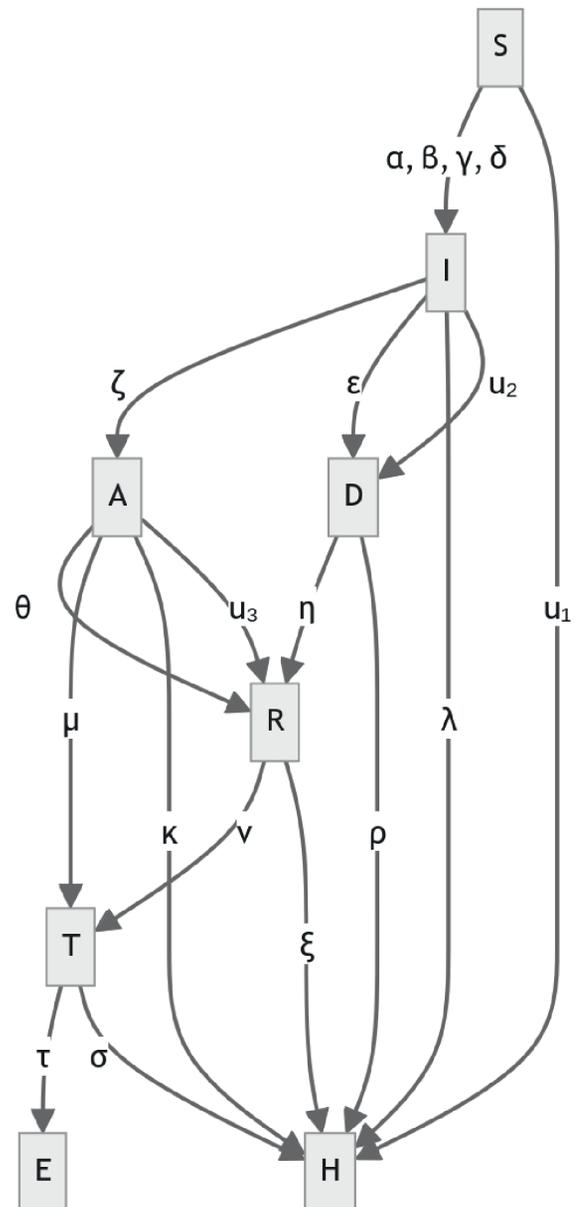


Рис. 3. Схема взаимодействий для SIDARTHEU-модели.

- S – количество восприимчивых к заболеванию людей;
- I – количество скрыто инфицированных людей на текущий момент;
- D – количество бессимптомных инфицированных, диагностированных лабораторно;
- A – количество недиагностированных инфицированных с симптоматикой;
- R – количество клинически диагностированных больных;
- T – количество угрожаемых (госпитализированных) диагностированных больных;
- H – количество выздоровевших (иммунизированных);
- E – количество погибших.

В модели SIDARTHEU рассматриваются три управляющих взаимодействия. Взаимодействие u_1 отвечает за переход из компартмента S в компартмент H (иммунизация), взаимодействия u_2 и u_3 отвечают за ускорение диагностирования заболевания (переход в компартменты D и R соответственно). Дифференциальные уравнения модели имеют вид

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} -su_1 - as\gamma - ds\beta - isa - rs\delta \\ -iu_2 - i\varepsilon - i\zeta - i\lambda + as\gamma + ds\beta + isa + rs\delta \\ -d\eta - d\rho + iu_2 + i\varepsilon \\ -au_3 - a\theta - ak - a\mu + i\zeta \\ au_3 + a\theta + d\eta - rv - r\xi \\ -t\sigma - t\tau + a\mu + rv \\ t\sigma + ak + d\rho + i\lambda + r\xi + su_1 \\ \tau \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

где $X = [s, i, d, a, r, t, h, e]^T$. Для предложенных компартментальных моделей может рассматриваться задача оптимального управления. Требования, предъявляемые к управлению, могут определяться как диапазоном возможного регулирования взаимодействий, так и фазовыми ограничениями в системе. Для идентификации параметров компартментальных моделей целесообразно использовать методы глобальной численной оптимизации.

В рамках настоящей работы мы рассматриваем вопросы разработки программного инструментария для символьных вычислений, позволяющих осуществлять в автоматизированном режиме синтез компартментальных моделей произвольной размерности на основе схемы взаимодействий. В качестве примеров выбраны задачи синтеза управляемых моделей (2.1)–(2.3).

3. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ СИНТЕЗА КОМПАРТМЕНТАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОСТИ УПРАВЛЕНИЯ

В рассматриваемом подходе к построению компартментальных моделей используются возможности языка Julia, связанные с реализацией символьных вычислений средствами метапрограммирования. Для реализации управлений в моделях предполагается разработка специализированных правил, допускающих достаточно простую интеграцию в схему взаимодействия компонентов модели.

В [10] рассматривается программный комплекс символьных вычислений, который позволяет получать детерминистическое и стохастическое описание модели по схеме взаимодействия ее элементов. Указанный программный комплекс состоит из функционального блока (отвечает за расчет вектора сноса, матрицы диффузии и разбор схемы взаимодействий) и конструирующего блока (отвечает за построение модели с использованием правил). Однако в указанном программном комплексе правила перехода задаются в форме строковых данных, что может быть полезно при чтении правил из файла, но не совсем удобно при реализации программы. Кроме того, в комплексе не предусмотрены возможности построения имитационных реализаций компартментальных моделей и проведения сравнительного анализа для управляемого и неуправляемого случаев. Добавление указанного функционала является важным направлением развития программного комплекса.

Программное обеспечение, предлагаемое в настоящей работе, можно рассматривать как расширение возможностей программного комплекса с учетом функциональности метапрограммирования в языке Julia. В частности, на основе макросов реализован DSL (Domain Specific Language, предметно-ориентированный язык) для содержательного описания компартментальных моделей на основе схемы взаимодействий. Для реализации данного предметно-ориентированного языка разработаны следующие макросы.

1. Макрос `@cmodel`. Указанный макрос возвращает компартментальную модель с определенным количеством компартментов, названия которых определяются символьными переменными.

2. Макрос @rule. Данный макрос добавляет правила взаимодействий для указанной модели в формате “ $a + b \rightarrow c + d$ ”.
3. Макрос @showrules. Этот макрос выводит схему взаимодействий для указанной модели.
4. Макрос @latexrules. Указанный макрос возвращает описание правил взаимодействия в формате LaTeX.

Перечисленные макросы предназначены для создания компартментальных моделей с помощью правил. Предметно-ориентированный язык позволяет записывать правила для одиночных и бинарных взаимодействий. Указанные правила могут иметь следующий формат:

$$\begin{aligned} \alpha(a + b \rightarrow c + d) \\ \beta(a + b \rightarrow c) \\ \gamma(a \rightarrow c) \\ \delta(a \rightarrow c + d) \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – коэффициенты интенсивностей взаимодействий, a, b, c, d – взаимодействующие компартменты.

Апробация макросов осуществлена с учетом следующих примеров компартментальных моделей: SIR, SEIR, SIDARTHE, SIRU, SEIRU, SIDARTHEU.

Поскольку программный комплекс использует формат символьных переменных Symbolics.jl, вначале необходимо определить перечень переменных с помощью макроса @variables, например:

```
@variables s i r
```

Затем с использованием указанных переменных можно определить модель SIR и добавить правила переходов:

```
sir = @cmodel s i r
@rule sir  $\alpha(s + i \rightarrow i + i)$ 
@rule sir  $\beta(i \rightarrow r)$ 
```

Схема взаимодействий может быть выведена с помощью макроса @showrules:

```
@showrules sir
```

Выведенные правила имеют вид

$$\begin{aligned} i + s &\xrightarrow{\alpha} 2i; \\ i &\xrightarrow{\beta} r. \end{aligned}$$

В схеме взаимодействий SIR-модели содержатся два правила. Первое правило (строка 1) отвечает за взаимодействие типа “хищник–жертва”, при котором восприимчивый и зараженный субъекты переходят в состояние двух зараженных. Второе правило (строка 2) отвечает за взаимодействие типа “миграция”,

при котором зараженные субъекты переходят в состояние выздоровевших.

В рамках программного комплекса предусмотрена функциональность для построения имитационной модели компартментальной системы. Указанная модель является дискретной во времени, а бинарные взаимодействия на каждом шаге осуществляются в зависимости от вероятности перехода, которая определяется правилом взаимодействия. Очевидно, что вероятность перехода прямо пропорциональна интенсивности перехода и количеству субъектов во взаимодействующих компартментах. С учетом уравнений вольной размерности на основе схемы взаимодействий. В качестве примеров выбраны задачи синтеза управляемых моделей (2.1)–(2.3), можно принять, что интенсивность роста (убывания) численности субъектов в компартменте от одного

вида взаимодействий равна $a_s \prod_{i=1}^n (x^s)_i$, где x – вектор численностей взаимодействующих компартментов; s – вектор взаимодействий; a_s – коэффициент интенсивности переходов для вектора s ; n – количество компартментов. Для имитационной модели примем, что приближенно выполняется равенство

$$\prod_{i=1}^n (x^s)_i = h^{-1} \rho_s, \quad (3.1)$$

где ρ_s – вероятность наступления взаимодействия; h – размер временного шага. Отсюда следует, что для s -взаимодействия имеет место равенство

$$\rho_s = h a_s \prod_{i=1}^n (x^s)_i. \quad (3.2)$$

Формулы (3.1), (3.2) можно использовать для построения алгоритма реализации имитационной модели. Алгоритм 1 соответствует n -мерной компартментальной системе и состоит из следующих этапов.

Результатом работы алгоритма является набор траекторий имитационной модели, который может быть визуализирован в виде графиков. Для установления соответствия траекторий с дифференциальными моделями достаточно временной параметр к единому масштабу. Указанное соответствие позволяет выполнить сравнительный анализ двух типов моделей и оценить адекватность имитационной реализации. Алгоритм является универсальным по отношению к реализации компартментальных моделей динамических систем с произвольным количеством фазовых переменных.

Аргументы: Матрицы взаимодействий M , N , количество шагов $steps$, начальные условия $init$

Результат: Траектории модели $result$

```

result = [ ];
push!(result, init);
C = M - N;
forall step ∈ steps do
    X = result[end];
    forall s ∈ C do
        if ρs > rand(0, 1) then
            X += s;
        else
            pass;
        end
    end
    end
    push!(result, X);
end
print(result);

```

Алгоритм 1. Алгоритм имитационного моделирования компартментальных моделей

Важно отметить, что алгоритм позволяет выполнять построение моделей как в управляемом случае, так и в неуправляемом. Реализовать управление мы предлагаем с помощью callback-функции, которая реализует события. Указанная функция в качестве аргументов принимает фазовое состояние системы, время и текущие параметры. На основе полученной информации принимается решение об изменении значений параметров. Далее будут рассмотрены примеры реализации управления в моделях распространения эпидемий. Общая схема разработанного программного комплекса имеет вид, представленный на рис. 4.

Таким образом, представленное алгоритмическое и программное обеспечение позволяет в рамках расширенного программного ком-

плекса символьных вычислений формализовать компартментальные модели по описанию взаимодействий между элементами на специальном предметно-ориентированном языке, а также предоставляет возможности описания и реализации управления в моделях указанного типа. Также программный комплекс символьных вычислений предоставляет возможности автоматизированного вывода информации о правилах взаимодействий в формате LaTeX. Пример, иллюстрирующий использование разработанного программного обеспечения для построения компартментальных моделей, доступен по адресу https://github.com/corvuscor/compart_example.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРАЕКТОРНОЙ ДИНАМИКИ В ЗАДАЧАХ ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭПИДЕМИЙ

В настоящем разделе на примерах трех типов моделей распространения эпидемий (SIR-модели, SEIR-модели и SIDARTHE-модели) и их управляемых модификаций (SIRU-модели, SEIRU-модели и SIDARTHEU-модели) рассмотрены вопросы сравнения имитационных и дифференциальных реализаций с учетом управляющих воздействий.

Далее изучим особенности траекторной динамики для имитационной и дифференциальной реализаций SIR-модели, а также ее управляемого варианта. С помощью разработанного алгоритмического и программного обеспечения получена формализация модели. Результаты с учетом выбранных начальных условий и параметров представлены на рис. 5. Далее всюду сплошными линиями обозначены траектории имитационных моделей, штрихпунктирными линиями обозначены траектории аналитических моделей.

Согласно полученным результатам наблюдается корреляция между аналитической и имитационной моделями. В построенной модификации модели SIR с учетом управления (модель SIRU) учитывается переход из компартмента S (восприимчивые) в компартмент R (невосприимчивые) под воздействием управления u . Далее приведем фрагмент программного кода для создания SIRU-модели с помощью макросов:

```

siru = deepcopy(sir)
@rule siru u(s → r)
@showrules siru

```

Указанный программный код модифицирует копию модели SIR с помощью дополнительного правила, которое обозначает управление. Схема

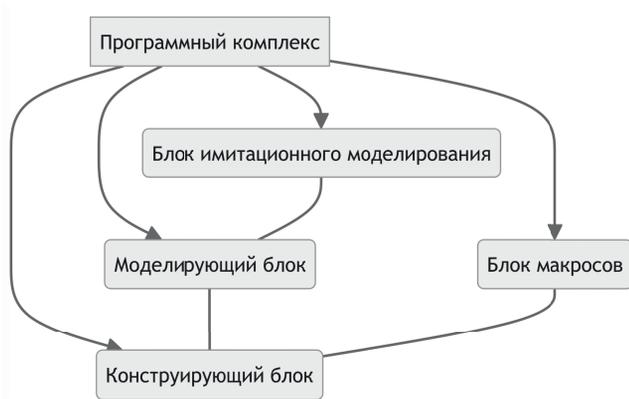


Рис. 4. Схема взаимодействия блоков в программном комплексе.

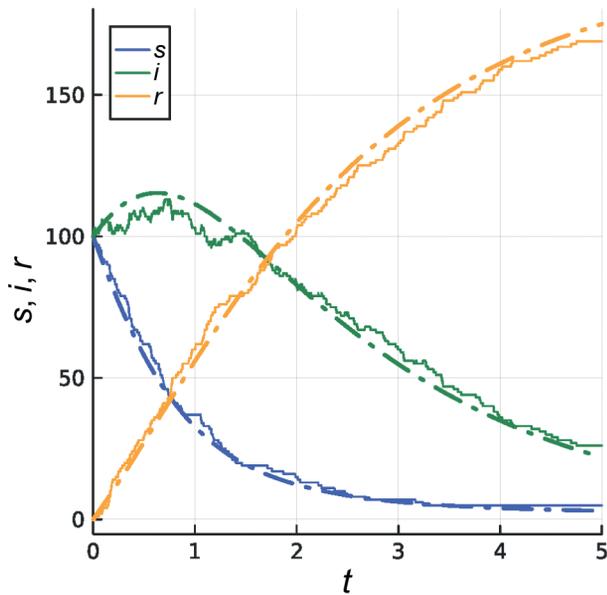


Рис. 5. Траектории имитационной и дифференциальной реализаций SIR-модели при $s(0), i(0), r(0) = (100, 150, 0)$; $\alpha, \beta = (0.01, 0.5)$. Сплошной и штрихпунктирной линиями обозначены траектории имитационной и аналитической реализаций SIR-модели соответственно.

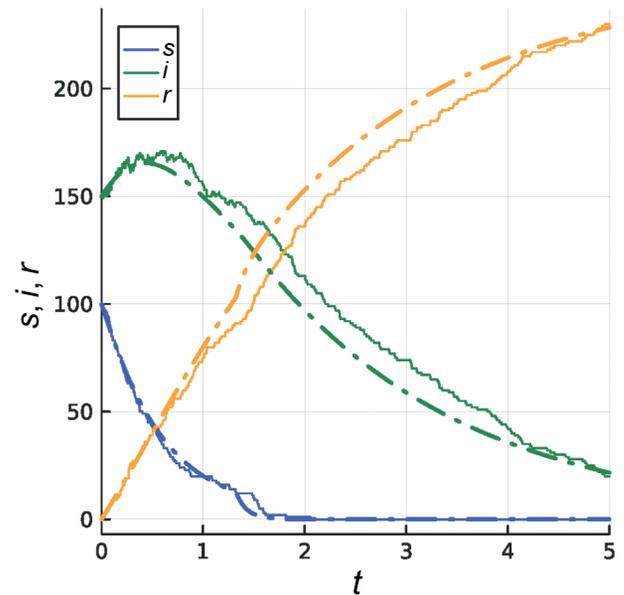
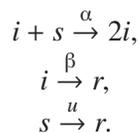


Рис. 6. Траектории имитационной и дифференциальной реализаций SIRU-модели при $s(0), i(0), r(0) = (100, 150, 0)$; $\alpha, \beta, u = (0.01, 0.5, 0)$. Сплошной и штрихпунктирной линиями обозначены траектории имитационной и аналитической реализаций SIRU-модели соответственно.

взаимодействий для SIRU-модели имеет вид



Вектор сноса для модели SIRU имеет вид

$$\begin{bmatrix} -su - isa \\ -i\beta + isa \\ i\beta + su \end{bmatrix}.$$

Траектории для аналитической и имитационной реализации модели SIRU представлены на рис. 6.

Траектории, представленные на рис. 6, демонстрируют динамику компартментальной модели для управляемого случая. По умолчанию интенсивность u перехода между компартментами восприимчивых и невосприимчивых равна нулю. В случае если значение $s \leq 140$, интенсивность перехода u возрастает до 8.0. Указанное возрастание u соответствует наличию управляющего воздействия, при котором проводится иммунизация восприимчивых. На рис. 6 введение управления отмечается перегибом на графике значений s как для детерминированного, так и для стохастического случаев.

Далее рассмотрим особенности траекторной динамики четырехмерной модели SEIR и ее управляемого варианта. Модель SEIR задается следующим программным кодом:

```
@variables e
seir = @cmodel s e i r
@rule seir alpha(s + e -> e + e)
@rule seir beta(e -> i)
@rule seir gamma(i -> r)
```

Траектории для указанной модели представлены на рис. 7, согласно которому при выбранных начальных условиях и параметрах наблюдается корреляция между траекториями имитационной и дифференциальной моделей.

Отметим, что в случае SEIR-системы имитационная модель является более чувствительной к изменению начальных условий по сравнению с аналитической моделью. Указанный факт можно проиллюстрировать таким изменением начальных условий, при котором количество инфицированных мало, что оказывает влияние на вероятность перехода между состояниями. Соответствующие траектории с учетом $e(0) = 10$ приведены на рис. 8.

Согласно рис. 8 при $e(0) = 10$ траектории имитационной модели существенно отличаются от дифференциальной модели, поскольку переходы между состояниями из-за малого количества зараженных происходят реже. Тем не менее в це-

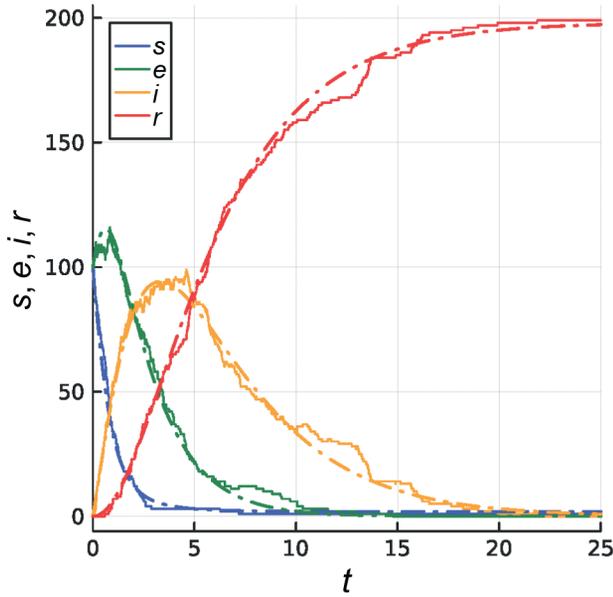


Рис. 7. Траектории имитационной и дифференциальной реализаций SEIR-модели при $s(0), e(0), i(0), r(0) = (100, 100, 0, 0)$; $\alpha, \beta, \gamma = (0.01, 0.5, 0.25)$. Сплошной и штрихпунктирной линиями обозначены траектории имитационной и аналитической реализаций SEIR-модели соответственно.

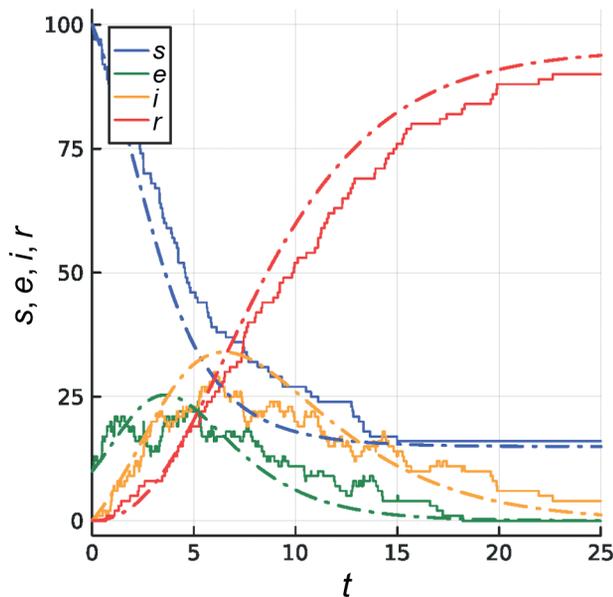


Рис. 8. Траектории имитационной и дифференциальной реализаций SEIR-модели при $s(0), e(0), i(0), r(0) = (100, 10, 0, 0)$; $\alpha, \beta, \gamma = (0.01, 0.5, 0.25)$. Сплошной и штрихпунктирной линиями обозначены траектории имитационной и аналитической реализаций SEIR-модели соответственно.

лом по-прежнему наблюдается взаимное соответствие между траекториями имитационной и аналитической моделей.

Далее рассмотрим результаты моделирования для управляемой SEIRU-модели. Указанная модель создается на основе SEIR-модели с помощью следующего программного кода:

```
seiru = deepcopy(seir)
@rule seiru u(s → r)
```

Результаты моделирования для модели SEIRU представлены на рис. 9.

По аналогии с SIRU-моделью интенсивность u перехода между компартментами восприимчивых и невосприимчивых изначально равна нулю. В случае если значение $i \geq 60$, интенсивность перехода u возрастает до 6.0. Введение управления можно отследить по изменению графиков компартментов s и r на начальном этапе. Однако управление в данном случае не оказывает существенного влияния на динамику SEIR-системы в долгосрочной перспективе.

Далее рассмотрим особенности траекторной динамики модели SIDARTHE и ее управляемого варианта. Интенсивности переходов для указанной модели в качестве примера определены случайным образом.

Программный код для определения указанной модели имеет следующий вид.

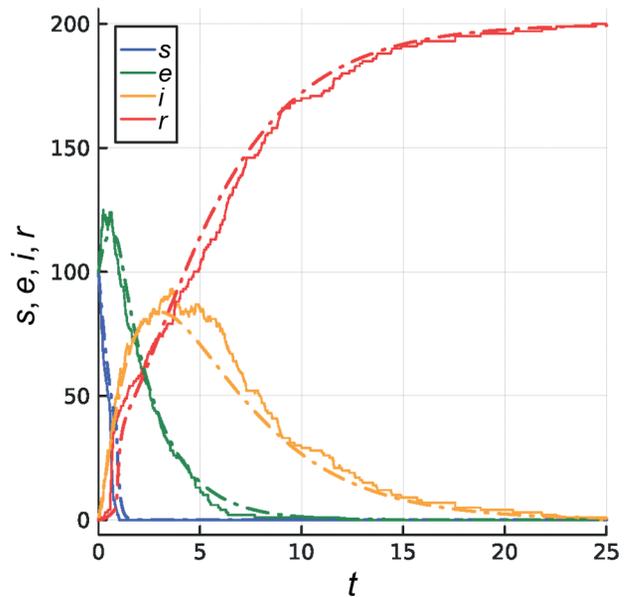


Рис. 9. Траектории имитационной и дифференциальной реализаций управляемой SEIRU-модели при $s(0), e(0), i(0), r(0) = (100, 100, 0, 0)$; $\alpha, \beta, \gamma, u = (0.01, 0.5, 0.25, 0.0)$. Сплошной и штрихпунктирной линиями обозначены траектории имитационной и аналитической реализаций SEIRU-модели соответственно.

```

@variables s i d a r t h e
sidarthe = @cmodel s i d a r t h e
@rule sidarthe  $\alpha(s + i \rightarrow i + i)$ 
@rule sidarthe  $\beta(s + d \rightarrow i + d)$ 
@rule sidarthe  $\gamma(s + a \rightarrow i + a)$ 
@rule sidarthe  $\delta(s + r \rightarrow i + r)$ 
@rule sidarthe  $\zeta(i \rightarrow a)$ 
@rule sidarthe  $\varepsilon(i \rightarrow d)$ 
@rule sidarthe  $\lambda(i \rightarrow h)$ 
@rule sidarthe  $\theta(a \rightarrow r)$ 
@rule sidarthe  $\mu(a \rightarrow t)$ 
@rule sidarthe  $\kappa(a \rightarrow h)$ 
@rule sidarthe  $\eta(d \rightarrow r)$ 
@rule sidarthe  $\rho(d \rightarrow h)$ 
@rule sidarthe  $\nu(r \rightarrow t)$ 
@rule sidarthe  $\xi(r \rightarrow h)$ 
@rule sidarthe  $\tau(t \rightarrow e)$ 
@rule sidarthe  $\sigma(t \rightarrow h)$ 

```

Траекторная динамика для модели SIDARTHE представлена на рис. 10. Далее всюду траектории аналитической модели показаны толстыми линиями.

Как и в случае рассмотренных ранее моделей, для модели SIDARTHE наблюдается сходство траекторий имитационной и аналитической реализаций. Численности, соответствующие компартментам, уменьшаются с приближением к нулю, за исключением компартментов h (выздоровевшие) и e (погибшие).

Для управляемого случая, представленного на рис. 11, рассматриваются три вида управлений: u_1 как интенсивность перехода из s (восприимчивые) в h (здоровые), u_2 как дополнительная интенсивность перехода из i (скрыто инфицированные) в d (лабораторно диагностированные) и u_3 как дополнительная интенсивность перехода a (явно инфицированные) в r (клинически диагностированные). Условием установления интенсивностей переходов $(u_1, u_2, u_3) = (5, 4, 4)$ является $e \geq 10$.

В целом, управление посредством u_1, u_2, u_3 оказывает существенное влияние на динамику диагностирования болезни. При введении управления наблюдается всплеск диагностирования болезни при резком уменьшении недиагностированных случаев. Однако рассматриваемое управление почти не оказывает влияния на динамику выздоравливания, поскольку на момент устанавливаемых карантинных мер не остается незараженных пациентов ($s \approx 0$).

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотренные примеры моделей SIR, SEIR и SIDARTHE демонстрируют возможности разработанного алгоритмического и программно-

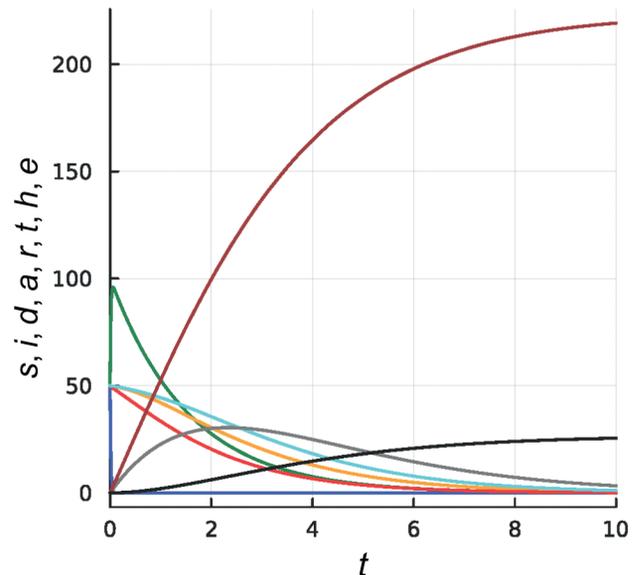
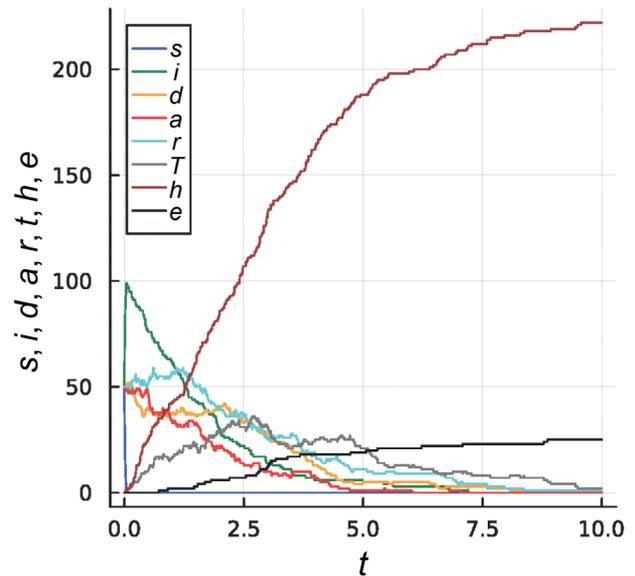


Рис. 10. Траектории имитационной и дифференциальной реализаций SIDARTHE-модели при $(s, i, d, a, r, t, h, e) = (50, 50, 50, 50, 50, 0, 0, 0)$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \varepsilon, \lambda, \theta, \mu, \kappa, \eta, \rho, \nu, \xi, \tau, \sigma = (0.352359, 0.218602, 0.322422, 0.303568, 0.308095, 0.298891, 0.0384277, 0.359602, 0.345673, 0.236463, 0.326316, 0.312761, 0.321541, 0.429833, 0.151676, 0.384773)$.

го обеспечения для моделирования компартментальных систем различной размерности и возможности оценки использования управляющих воздействий в таких системах. Следует отметить, что в рамках программного комплекса можно изучать не только эпидемиологические модели, но и экологические, социально-экономические,

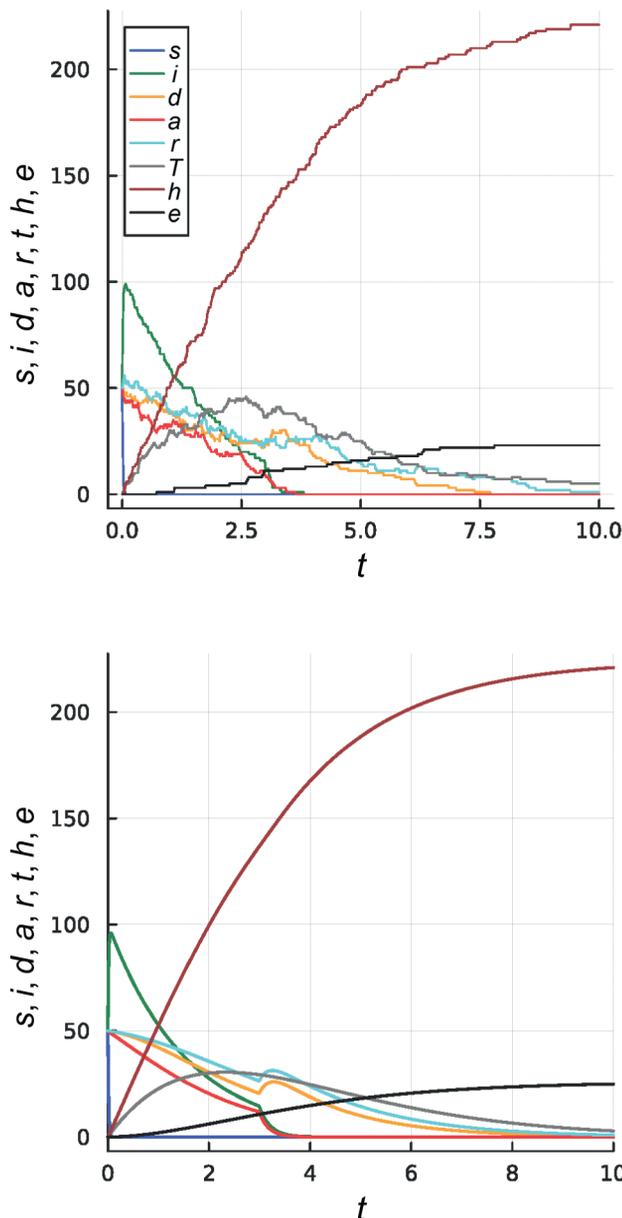


Рис. 11. Траектории имитационной и дифференциальной реализаций SIDARTHEU-модели при $(s, i, d, a, r, t, h, e) = [50, 50, 50, 50, 50, 0, 0, 0]$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \zeta, \varepsilon, \lambda, \theta, \mu, \kappa, \eta, \rho, \nu, \xi, \tau, \sigma, u_1, u_2, u_3 = (0.352359, 0.218602, 0.322422, 0.303568, 0.308095, 0.298891, 0.0384277, 0.359602, 0.345673, 0.236463, 0.326316, 0.312761, 0.321541, 0.429833, 0.151676, 0.384773, 0., 0., 0.)$.

физико-химические и другие модели, базирующиеся на одношаговых взаимодействиях.

Программный комплекс позволяет осуществлять синтез моделей как без управления, так и с управлением, причем количество управляющих воздействий в общем случае может превышать количество компарментов. Синтез ими-

тационных моделей компарментальных систем осуществляется на основе сущностного описания взаимодействий в виде правил перехода между компартаментами. Рассмотренные имитационные реализации компарментальных моделей демонстрируют динамику, коррелирующую с динамикой аналитических реализаций при выбранных начальных условиях и наборах параметров. Согласованность реализаций подтверждается результатами, приведенными на рис. 5, 6 для SIR- и SIRU-моделей, на рис. 7–9 для SEIR- и SEIRU-моделей, а также на рис. 10, 11 для SIDARTHE- и SIDARTHEU-моделей.

Следует отметить, что рассмотренные имитационные реализации компарментальных моделей показывают более высокую зависимость от начальных условий, чем аналитические реализации. Указанное обстоятельство связано с вероятностной природой переходов между состояниями.

Разработанный программный комплекс позволяет выполнить оценку влияния управляющих воздействий в компарментальных моделях и выявить новые качественные эффекты, связанные с управлением. Результаты конструирования эпидемиологических моделей с управлением с помощью программного комплекса соответствуют формальному их описанию в виде систем дифференциальных уравнений (2.1)–(2.3).

Предложенный предметно-ориентированный язык для конструирования компарментальной модели позволяет реализовать лаконичное и легко читаемое описание схемы взаимодействий между компартаментами, что значительно упрощает использование программного комплекса символьных вычислений исследователями, не специализирующимися на программировании.

В дальнейшем возможна модификация алгоритма реализации имитационной модели в направлении, связанном с использованием различных параметров вероятностей переходов и с проведением соответствующего сравнения эффективности. Следует отметить, что алгоритм разработан для потенциально произвольного числа компарментов изучаемых моделей одношаговых процессов, однако особенности его реализуемости могут быть изучены в процессе проведения серии вычислительных экспериментов.

Предлагаемый в [10] и развиваемый в настоящей работе подход к построению компарментальных моделей допускает описание не только детерминированных, но и стохастических моделей. При описании и изучении стохастических моделей эпидемиологии можно использовать ряд результатов, полученных в [31–36]. Процесс стохастизации осуществляется на основе

метода построения самосогласованных стохастических моделей [37, 38]. Детерминированную модель определяет вектор сноса в уравнении Фоккера–Планка, а при стохастизации учитывается как вектор сноса, так и матрица диффузии [7, 10, 37, 38].

В разработанном программном комплексе существует возможность автоматизированного вывода схемы взаимодействий в формате LaTeX, однако в качестве перспектив развития программного комплекса можно отметить создание интерактивного интерфейса пользователя, создание блока визуализации графов моделей без управления и с управлением. Кроме того, теоретический и прикладной интерес представляет решение задач синтеза компартментальных моделей на базе расширения набора привлекаемых методов, например, с применением клеточных автоматов. Также к числу важных задач относится унификация разработанного программного комплекса с учетом использования инфраструктуры математических библиотек Julia.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе развит подход к разработке алгоритмического обеспечения для символьных вычислений в задачах построения и исследования управляемых компартментальных моделей динамических систем. Разработанные модули программного комплекса позволяют решать задачи формализации многомерных компартментальных моделей с учетом сущностного описания и возможностей управления, а также визуализировать результаты в виде графиков траекторий. В качестве преимуществ использования языка Julia при разработке программного комплекса следует отметить возможности высокопроизводительных реализаций численных методов, а также возможности удобного инструментария компьютерной алгебры. В качестве перспективы развития рассмотренного в настоящей работе подхода к конструированию и исследованию моделей можно отметить возможность численного расчета траекторий стохастических компартментальных систем с управлением. Результаты могут найти применение при изучении управляемых динамических моделей одношаговых процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулябов Д.С., Королькова А.В. Компьютерная алгебра на Julia // Программирование. 2021. № 2. С. 44–50. <https://doi.org/10.31857/S0132347421020084>
2. Korol'kova A.V., Gevorkyan M.N., Fedorov A.V., Shtepa K.A., Kulyabov D.S. Symbolic studies of Maxwell's equations in space-time algebra formalism // Programming and Computer Software. 2024. V. 50. № 2. P. 166–171.
3. Bittner B., Sreenath K. Symbolic Computation of Dynamics on Smooth Manifolds // In: Goldberg K., Abbeel P., Bekris K., Miller L. (eds) Algorithmic Foundations of Robotics XII. Springer Proceedings in Advanced Robotics. 2020. V. 13. Springer, Cham. P. 336–351. https://doi.org/10.1007/978-3-030-43089-4_22
4. Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б. Компонентное моделирование сложных динамических систем. СПб.: Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2020.
5. Bانشchikov A., Vetrov A. Application of software tools for symbolic description and modeling of mechanical systems // CEUR Workshop Proceedings. 2. ser. "ICCSDE 2020 — Proceedings of the 2nd International Workshop on Information, Computation, and Control Systems for Distributed Environments". 2020. P. 33–42.
6. Банщиков А.В. Применение компьютерной алгебры для анализа гироскопической стабилизации равновесий орбитального гиростата // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2021. Т. 14. № 2. С. 70–77. <https://doi.org/10.14529/mmp210207>
7. Демидова А.В., Дружинина О.В., Масина О.Н., Петров А.А. Разработка алгоритмического и программного обеспечения моделирования управляемых динамических систем с применением символьных вычислений и стохастических методов // Программирование. 2023. № 2. С. 54–68.
8. Bezanson J., Karpinski S., Shah V., Edelman A. Julia: A fast dynamic language for technical computing, 2012. <https://arxiv.org/abs/1209.5145>
9. Strauss R.R., Bishnu S., Petersen M.R. Comparing the performance of Julia on CPUs versus GPUs and JuliaMPI versus Fortran-MPI: A case study with MPASOcean (Version 7.1) // EGUsphere. 2023. V. 2023. P. 1–22.
10. Демидова А.В., Дружинина О.В., Масина О.Н., Петров А.А. Построение компартментальных моделей динамических систем с применением программного комплекса символьных вычислений на языке Julia // Программирование. 2024. № 2. P. 33–44.
11. Brauer F. Mathematical epidemiology: Past, present, and future // Infectious Disease Modelling. 2017. V. 2. P. 113–127.
12. Кабанихин С.И. Оптимизационные методы решения обратных задач иммунологии и эпидемиологии // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2020. Т. 60. № 4. С. 590–600.
13. Patlolla P., Gunupudi V., Mikler A.R., Jacob R.T. Agent-Based Simulation Tools in Computational Epidemiology // 4th International Workshop, International Conference on Innovative Internet Community Systems (I2CS '04). Berlin/Heidelberg: Springer, 2004. P. 212–223.

14. Аль-Азази А., Скворцов А.В., Масленников Б.И. Компартментная модель распространения эпидемического заболевания (на примере туберкулеза-ВИЧ) // Вестник ТвГТУ. 2013. Вып. 23. № 1. С. 3–9.
15. Котин В.В., Червяков Н.М. Неопределенность начальных условий в SEIR-модели с вакцинацией // Биомедицинская радиоэлектроника. 2019. № 6. С. 40–47.
<https://doi.org/10.18127/j15604136-201906-07>
16. Martcheva M. An introduction to mathematical epidemiology. Springer, 2015.
17. Романюха А.А. Математические модели в иммунологии и эпидемиологии инфекционных заболеваний. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. 293 с.
18. Gromov D.V., Bulla I., Romero-Severson E.O., Serea O.S. Numerical optimal control for HIV prevention with dynamic budget allocation // Mathematical Medicine and Biology. 2016. V. 35. № 4. P. 469–491.
19. Hamelin F., Iggidr A., Rapaport A., Sallet G. Observability, Identifiability and Epidemiology A survey, 2021.
20. Котин В.В., Сычугина А.С. Оптимизация программного управления процедурами вакцинации // Биомедицинская радиоэлектроника. 2016. № 7. С. 25–30.
21. Котин В.В., Литун Е.И., Литун С.И. Оптимизация последовательного режима вакцинации и оценка областей достижимости // Биомедицинская радиоэлектроника. 2017. № 9. С. 29–34.
22. Жуков В.В., Котин В.В. Эффективность, контроль и оптимальность вакцинации // Биомедицинская радиоэлектроника. 2018. № 10. С. 52–56.
23. Овсянникова Н.И. Поиск оптимального управления в модели эпидемии // Журнал СВМО. 2009. Т. 11. № 2. С. 119–126.
24. Hansen E., Day T. Optimal control of epidemics with limited resources // J. Math. Biol. 2011. V. 62. № 3. P. 423–451.
<https://doi.org/10.1007/s00285-010-0341-0>
25. Zhou Y., Wu J., Wu M. Optimal isolation strategies of emerging infectious diseases with limited resources // Math. Biosci. Eng. 2013. V. 10. № 5–6. P. 1691–1701.
<https://doi.org/10.3934/mbe.2013.10.1691>
26. Zhou P., Yang X.L., Wang X.G. et al. A pneumonia outbreak associated with a new coronavirus of probable bat origin // Nature. 2020. V. 579. № 7798. P. 270–273.
<https://doi.org/10.1038/s41586-020-2012-7>
27. Yang Z., Zeng Z., Wang K. et al. Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions // J. Thorac. Dis. 2020. V. 12. № 3. P. 165–174.
<https://doi.org/10.21037/jtd.2020.02.64>
28. Карпенко А.П. Современные алгоритмы поисковой оптимизации. Алгоритмы, вдохновленные природой. 2-е изд. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016.
29. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. Synthesis and computer study of population dynamics controlled models using methods of numerical optimization, stochastization and machine learning // Mathematics. 2021. V. 9. Iss. 24. P. 3303.
<https://doi.org/10.3390/math9243303>
30. Nowakova J., Pokorny M. Intelligent Controller Design by the Artificial Intelligence Methods // Sensors. 2020. V. 20. № 16. P. 4454.
<https://doi.org/10.3390/s20164454>
31. Lekone P.E., Finkenstadt B.F. Statistical Inference in a Stochastic Epidemic SEIR Model with Control Intervention: Ebola as a Case Study // Biometrics. 2006. V. 62. P. 1170–1177.
32. Pertsev N.V., Leonenko V.N. Discrete stochastic model of HIV infection spread within a heterogeneous population // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2012. V. 27. P. 459–477.
33. Шабунин А.В. SIRS-модель распространения инфекций с динамическим регулированием численности популяций: исследование методом вероятностных клеточных автоматов // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2019. Т. 27. № 2. С. 5–20.
34. Allen L.J.S. An Introduction to Stochastic Epidemic Models // Mathematical Epidemiology / Ed. by F. Brauer, P. van den Driessche, J. Wu. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008. P. 81–130.
https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6_3
35. Ключкова Л.В., Орлов Ю.Н., Тишкин В.Ф. Математическое моделирование стохастических процессов распространения вирусов в среде обитания людей // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 114. 17 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-114>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-114>
36. Овсянникова Н.И. Стохастическая модель динамики эпидемии // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2016. № 224(2). С. 107–114.
37. Геворкян М.Н., Демидова А.В., Велиева Т.Р., Королькова А.В., Кулябов Д.С., Севастьянов Л.А. Реализация метода стохастизации одношаговых процессов в системе компьютерной алгебры // Программирование. 2018. № 2. С. 18–27.
38. Korolkova A., Kulyabov D. Onestep stochastization methods for open systems // EPJ Web of Conferences. 2020. V. 226. P. 02014.
<https://doi.org/10.1051/epjconf/202022602014>

DEVELOPMENT OF ALGORITHMIC AND SOFTWARE SUPPORT FOR SYMBOLIC COMPUTATIONS IN PROBLEMS OF CONSTRUCTING CONTROLLED COMPARTMENTAL MODELS OF DYNAMIC SYSTEMS

A. A. Petrov^a, O. V. Druzhinina^b, O. N. Masina^a, A. V. Demidova^c

^a*Bunin Yelets State University*

ul. Kommunarov 28, Yelets, Lipetsk oblast, 399770 Russia

^b*Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences*

ul. Vavilova 44/2, Moscow, 119333 Russia

^c*Peoples' Friendship University of Russia*

ul. Miklukho-Maklaya 6, Moscow, 117198 Russia

The analysis of epidemic spreading processes and the development of the corresponding algorithmic and software support for their mathematical modeling are important areas of research. The purpose of this work is to develop tools for symbolic computations in problems of constructing controlled compartmental models of dynamic systems. As a programming language, Julia is used in combination with scientific computing libraries. A software package for compartmental modeling based on schemes of inter-compartment interactions is developed. Several controlled compartmental models — SIRU, SEIRU, and SIDARTHEU — are constructed and investigated. Control is implemented in the form of additional rules with variable transition rates. The developed software complex implements a domain-specific language for compartmental model construction based on interaction schemes. A simulation algorithm for controlled compartmental models is proposed. Computational experiments on controlled simulation of epidemic spreading are carried out, and the trajectory dynamics of the simulation models and corresponding differential models is analyzed. The results can be useful in modeling epidemiological, ecological, physicochemical, and other processes with one-step interactions.

Keywords: controlled compartmental models, dynamic systems, computer algebra, compartmental simulation algorithm, Julia programming language, symbolic computing software

REFERENCES

1. Kulyabov D.S., Korol'kova A.V. Computer algebra in JULIA, Program. Comput. Software, 2021, vol. 47, pp. 133–138.
2. Korol'kova A.V., Gevorkyan M.N., Fedorov A.V., Shtepa K.A., Kulyabov D.S. Symbolic studies of Maxwell's equations in space-time algebra formalism, Program. Comput. Software, 2024, vol. 50, no. 2, pp. 166–171.
3. Bittner B., Sreenath K. Symbolic computation of dynamics on smooth manifolds, Algorithmic Foundations of Robotics XII, Goldberg K., Abbeel P., Bekris K., and Miller L., Eds., Springer, 2020, vol. 13, pp. 336–351. https://doi.org/10.1007/978-3-030-43089-4_22
4. Kolesov Yu.B., Senichenkov Yu.B. Komponentnoe modelirovanie slozhnykh dinamicheskikh sistem (Component Modeling of Complex Dynamic Systems), St. Petersburg: S.-Peterb. Politekh. Univ. PetraVelikogo, 2020.
5. Banshchikov A., Vetrov A. Application of software tools for symbolic description and modeling of mechanical systems, Proc. 2nd Int. Workshop Information, Computation, and Control Systems for Distributed Environments (ICCSDE), 2020, pp. 33–42.
6. Banshchikov A.V. Application of computer algebra to analysis of gyroscopic stabilization of orbital gyrostabilizers, Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ. Ser: Mat. Model. Program., 2021, vol. 14, no. 2, pp. 70–77. <https://doi.org/10.14529/mmp210207>
7. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. Development of algorithms and software for modeling controlled dynamic systems using symbolic computations and stochastic methods, Program. Comput. Software, 2023, vol. 49, pp. 108–121.
8. Bezanson J., Karpinski S., Shah V., Edelman A. Julia: A fast dynamic language for technical computing, 2012. <https://arxiv.org/abs/1209.5145>
9. Strauss R.R., Bishnu S., Petersen M.R. Comparing the performance of Julia on CPUs versus GPUs and JuliaMPI versus Fortran-MPI: A case study with MPASOcean (Version 7.1), EGUsphere, 2023, vol. 2023, pp. 1–22.

10. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. Constructing compartmental models of dynamic systems using a software package for symbolic computation in Julia, *Program. Comput. Software*, 2024, vol. 50, pp. 138–146.
11. Brauer F. *Mathematical epidemiology: Past, present, and future*, *Infect. Dis. Model.*, 2017, vol. 2, pp. 113–127.
12. Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. Optimization methods for solving inverse immunology and epidemiology problems, *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, vol. 60, pp. 580–589.
13. Patlolla P., Gunupudi V., Mikler A.R., Jacob R.T. Agent-based simulation tools in computational epidemiology, *Proc. 4th Int. Workshop, Int. Conf. Innovative Internet Community Systems (I2CS)*, Berlin-Heidelberg: Springer, 2004, pp. 212–223.
14. Al'-Azazi A., Skvortsov A.V., Maslennikov B.I. Compartment model of epidemic disease spread (by example of tuberculosis-HIV), *Vestn. Tver. Gos. Tekh. Univ.*, 2013, vol. 23, no. 1, pp. 3–9.
15. Kotin V.V., Chervyakov N.M. Uncertainty of initial conditions in the SEIR model with vaccination, *Biomed. Radioelektron.*, 2019, no. 6, pp. 40–47. <https://doi.org/10.18127/j15604136-201906-07>
16. Martcheva M. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, Springer, 2015.
17. Romanyukha A.A. *Matematicheskie modeli v immunologii i epidemiologii infektsionnykh zabolevaniy (Mathematical Models in Immunology and Epidemiology of Infectious Diseases)*, Moscow: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2012.
18. Gromov D.V., Bulla I., Romero-Severson E.O., Seera O.S. Numerical optimal control for HIV prevention with dynamic budget allocation, *Math. Med. Biol.*, 2016, vol. 35, no. 4, pp. 469–491.
19. Hamelin F., Iggidr A., Rapapor A., Sallet G. Observability, identifiability and epidemiology: A survey, 2021.
20. Kotin V.V., Sychugina A.S. Optimization of software-based control of vaccination procedures, *Biomed. Radioelektron.*, 2016, no. 7, pp. 25–30.
21. Kotin V.V., Litun E.I., Litun S.I. Optimization of the sequential vaccination regimen and assessment of attainability domains, *Biomed. Radioelektron.*, 2017, no. 9, pp. 29–34.
22. Zhukov V.V., Kotin V.V. Effectiveness, control and optimality of vaccination, *Biomed. Radioelektron.*, 2018, no. 10, pp. 52–56.
23. Ovsyannikova N.I. Search for optimal control in an epidemic model, *Zh. Srednevolzhskogo Mat. O-va.*, 2009, vol. 11, no. 2, pp. 119–126.
24. Hansen E., Day T. Optimal control of epidemics with limited resources, *J. Math. Biol.*, 2011, vol. 62, no. 3, pp. 423–451. <https://doi.org/10.1007/s00285-010-0341-0>
25. Zhou Y., Wu J., Wu M. Optimal isolation strategies of emerging infectious diseases with limited resources, *Math. Biosci. Eng.*, 2013, vol. 10, nos. 5–6, pp. 1691–1701. <https://doi.org/10.3934/mbe.2013.10.1691>
26. Zhou P., Yang X.L., Wang X.G. et al. A pneumonia outbreak associated with a new coronavirus of probable bat origin, *Nature*, 2020, vol. 579, no. 7798, pp. 270–273. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2012-7>
27. Yang Z., Zeng Z., Wang K. et al. Modified SEIR and AI prediction of the epidemics trend of COVID-19 in China under public health interventions, *J. Thorac. Dis.*, 2020, vol. 12, no. 3, pp. 165–174. <https://doi.org/10.21037/jtd.2020.02.64>
28. Karpenko A.P. *Sovremennye algoritmy poiskovoi optimizatsii. Algoritmy, vdokhnovlennyye prirodoy (Modern Search Engine Optimization Algorithms: Algorithms Inspired by Nature)*, Moscow: Bauman Moscow State Tech. Univ., 2016, 2nd ed.
29. Demidova A.V., Druzhinina O.V., Masina O.N., Petrov A.A. Synthesis and computer study of population dynamics controlled models using methods of numerical optimization, stochastization and machine learning, *Mathematics*, 2021, vol. 9, no. 24, p. 3303. <https://doi.org/10.3390/math9243303>
30. Nowakova J., Pokornyy M. Intelligent controller design by the artificial intelligence methods, *Sensors*, 2020, vol. 20, no. 16, p. 4454. <https://doi.org/10.3390/s20164454>
31. Lekone P.E., Finkenstadt B.F. Statistical inference in a stochastic epidemic SEIR model with control intervention: Ebola as a case study, *Biometrics*, 2006, vol. 62, pp. 1170–1177.
32. Pertsev N.V., Leonenko V.N. Discrete stochastic model of HIV infection spread within a heterogeneous population, *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 2012, vol. 27, pp. 459–477.
33. Shabunin A.V. SIRS model of infection disease spread with dynamic regulation of population size: A study using probabilistic cellular automata, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Prikl. Nelineinaya Din.*, 2019, vol. 27, no. 2, pp. 5–20.
34. Allen L.J.S. *An introduction to stochastic epidemic models*, *Mathematical Epidemiology*, Brauer F., van den Driessche P., and Wu J., Eds., Berlin-Heidelberg: Springer, 2008, pp. 81–130. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78911-6_3
35. Klochkova L.V., Orlov Yu.N., Tishkin V.F. Mathematical modeling of stochastic virus spread processes in human habitats, *Prepr. Inst. Prikl. Mat. Keldysha*, 2020, no. 114. <https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-114>. <https://doi.org/10.20948/prepr-2020-114>
36. Ovsyannikova N.I. Stochastic model of epidemic, *Nauchn. Vestn. Mos. Gos. Tekhn. Univ. Grazhdanskoi Aviats.*, 2016, no. 224, pp. 107–114.
37. Gevorkyan M.N., Demidova A.V., Velieva T.R., Korol'kova A.V., Kulyabov D.S., Sevast'yanov L.A. Implementing a method for stochastization of one-step processes in a computer algebra system, *Program. Comput. Software*, 2018, vol. 44, pp. 86–93.
38. Korolkova A., Kulyabov D. Onestep stochastization methods for open systems, *EPJ Web Conf.*, 2020, vol. 226, p. 02014. <https://doi.org/10.1051/epjconf/202022602014>