КОМПЬЮТЕРНАЯ АЛГЕБРА

УДК 004.421.6

О ВЫЧИСЛЕНИИ АБЕЛЕВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

© 2025 г. М. Д. Малых[a,b,*], Э. А. Айриян[b], Юй Ин[c]

[a] Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы
117198 Москва, улица Миклухо-Маклая, д. 6, Россия
[b] Объединенный институт ядерных исследований
141980 Дубна Московской области, Россия
[c] Университет Каили
556011 Kaiyuan Road 3, Kaili, China
*E-mail: malykh_md@pfur.ru

Поступила в редакцию 10.08.2024 г.
После доработки 01.09.2024 г.
Принята к публикации 22.09.2024 г.

Рассматриваются вопросы построения главной функции и абелевых дифференциалов 3-го типа на плоской алгебраической кривой над полем комплексных чисел, не имеющей особых точек. Алгоритм построения дифференциалов 3-го типа описан в Лекциях Вейерштрасса. В статье обсуждается его реализация в системе компьютерной алгебры Sage. Специфика этого алгоритма, равно как и самого понятия дифференциала 3-го типа, подразумевает использование не только рациональных чисел, но и алгебраических, причем даже тогда, когда уравнение кривой имеет целые коэффициенты. В Sage имеется встроенный инструментарий для работы с полем алгебраических чисел, который позволяет реализовать алгоритм Вейерштрасса почти дословно. На самом простом примере эллиптической кривой показано, что он требует слишком много ресурсов, выходя далеко за возможности офисного компьютера. Затем предложена и реализована симметризация метода, позволяющая существенно сэкономить ресурсы и решить названный пример.

Ключевые слова: компьютерная алгебра, символьное интегрирование, алгебраические функции

DOI: 10.31857/S0132347425010037, **EDN**: DXNQIV

1. ВВЕДЕНИЕ

Первые успехи систем компьютерной алгебры (CAS) обусловлены прежде всего тем, что еще в 1960-х гг. удалось создать алгоритмы символьного интегрирования элементарных функций, основанные на работах Лиувилля [1–3]. В 1980-е гг. встал вопрос о разработке компьютерных программ, которые позволили бы символьно интегрировать алгебраические функции (абелевы интегралы), см. [4]. В [5, 6] и [7] были предложены алгоритмы интегрирования абелевых интегралов в элементарные функции, но итоговый набор разработанных алгоритмов слишком сложен для реализации в CAS [8].

Из всех известных подходов к абелевым интегралам подход Вейерштрасса был самым конструктивным, на что впервые обратил внимание П.М. Покровский [9]. В [8] мы стремились показать, что предложенная в лекциях нормальная форма представления абелевых интегралов дает решение целого ряда классических задач и ее имплементация в системы компьютерной алгебры была бы весьма полезна. Ключевой проблемой на этом пути как в XIX в, так и сейчас является построение главной функции (fundamental function, Hauptfuktion) или, что то же в силу принципа двойственности, дифференциала 3-го типа (kind, Art), алгоритм построении которого описан в последней главе 1-й части Лекций Вейерштрасса [10], опубликованных в 1902 г. Хетнером и Кноблаухом. Примеров применения алгоритма в тексте не дано.

Характерная особенность подхода Вейерштрасса — использование большого числа иррациональных чисел, алгоритм определения которых или описан в тексте, или более-менее очевиден [11]. В системе Sage имеется встроенная реализация поля алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$, поэтому кажется, что алгоритмы из Лекций могут быть реализованы так, как написаны. Однако на практике символьные выражения, содержащие десяток числовых коэффициентов из поля алгебраических чисел $\overline{\mathbb{Q}}$, являются весьма сложными для выполнения с ними каких-либо манипуляций. Мы решили посмотреть на эту прямую реализацию алгоритмов и на сами эти выражения и оценить возникающие сложности.

2. АБЕЛЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПЕРВОГО ТИПА

Пусть многочлен f задает алгебраическую кривую C порядка r на проективной плоскости xy над полем $\mathbb{C}$. Пусть для простоты эта кривая не имеет особых точек.

Определение 1. *Дифференциал вида* udx, $u \in \mathbb{C}(x, y)$, *не имеющий особых точек, называют дифференциалом 1-го типа.*

Задача 1. *Дан многочлен* $f \in \mathbb{Q}[x, y]$. *Требуется построить непостоянную рациональную функцию* $u \in \overline{\mathbb{C}}(x, y)$ *такую, что* udx *является дифференциалом 1-го типа.*

Отсутствие конечных особых точек заставляет искать решение в виде

$$\frac{E(x, y)dx}{f_y(x, y)}, \quad E \in \mathbb{C}[x, y],$$

а отсутствие таких точек на бесконечности — указывает на то, что порядок многочлена E не может превышать $r-3$ [10, ch. 7]. Поскольку на коэффициенты этого многочлена не нужно накладывать никаких ограничений, множество дифференциалов 1-го типа имеет размерность

$$p = \frac{(r-1)(r-2)}{2},$$

которую называют родом кривой [4]. За базис этого пространства можно взять дифференциалы с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$, а не из его алгебраического замыкания. Поэтому при построении дифференциалов 1-го типа можно и нужно работать над полем $\mathbb{Q}$.

Алгоритмы вычисления базиса пространства дифференциалов 1-го типа для плоских кривых, в том числе имеющих особые точки, были предложены как в классических сочинениях, так и в современных работах [12]. В настоящее время они реализованы в системах Maple (AlgCurves, CASA) и Sage. Подчеркнем, что ключевым моментом этого успеха является возможность работать над полем $\mathbb{Q}$.

3. АБЕЛЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ТРЕТЬЕГО ТИПА

Определение 2. *Дифференциал вида* udx, $u \in \mathbb{C}(x, y)$, *называют дифференциалом третьего рода, если он имеет две особые точки, а именно полюса первого порядка* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2) *с вычетами* 1 *и* -1.

Задача 2. *Дан неразложимый многочлен* $f \in \mathbb{Q}[x, y]$, *задающий проективную кривую* C, *и две точки* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2) *на этой кривой, причем* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \overline{\mathbb{Q}}$. *Требуется построить непостоянную рациональную функцию* $u \in \mathbb{C}(x, y)$ *такую, что* udx *является дифференциалом 3-го типа с полюсами* (x_1, y_1) *и* (x_2, y_2).

Добавление к дифференциалу линейной комбинации дифференциалов 1-го типа не приводит к появлению новых особенностей или изменению вычетов, поэтому решение задачи 2 определено с точностью до линейной комбинации дифференциалов 1-го типа. Размерность линейного пространства дифференциалов 1-го типа равна роду p, вычисление которого обсуждалось в предыдущем разделе.

За решение задачи 2 на компьютере особо никто не брался, поскольку она, в отличие от задачи 1, очевидно требует работы над полем алгебраических чисел. Здесь мы кратко опишем решение этой проблемы, следуя [10, ch. 8].

Отсутствие конечных особых точек с $x \neq x_i$ заставляет искать решение в виде

$$\frac{E(x, y)dx}{(x - x_1)(x_2 - x)f_y(x, y)}, \quad E \in \mathbb{C}[x, y],$$

а отсутствие точек на бесконечности — указывает на то, что порядок многочлена E не может превышать $r - 1$. Уравнение

$$f(x_i, y) = 0$$

помимо корня $y = y_i$ имеет еще $r-1$ корней, условимся их обозначать как $y_i', \ldots, y_i^{(r-1)}$. Если среди них нет кратных, то уравнения

$$E(x_i, y_i^{(j)}) = 0, \quad i = 1, 2, \ j = 1, \ldots, r-1 \tag{3.1}$$

гарантируют отсутствие особенностей в точках, отличных от (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Условия на вычеты в этих точках дают еще два уравнения:

$$\begin{aligned} E(x_1, y_1) &= (x_2 - x_1)f_y(x_1, y_1); \\ E(x_2, y_2) &= (x_2 - x_1)f_y(x_2, y_2). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Таким образом, решение задачи 2 сводится к решению системы линейных уравнений с коэффициентами из $\overline{\mathbb{Q}}$, главное отличие задачи 2 от задачи 1 состоит в том, что требуется расширять числовое поле.

Предложенный в Лекциях Вейерштрасса метод можно кратко записать в виде Алгоритма 1, который мы реализовали в Sage [13].

Algorithm 1. Algorithm for finding the third kind integrals in the case of simple roots

Require:

Input: $f \in \mathbb{Q}[x, y]$, points (x_1, y_1), (x_2, y_2) of the curve f over the field $\overline{\mathbb{Q}}$

Output: differentials udx with p arbitrary coefficients, here u is an element of the field of fractions for the ring $\overline{\mathbb{Q}}[x, y]/(f)$.

Ensure:

step1: Calculate the lists R_1 and R_2 of the roots of the equations $f(x_1, y) = 0$ and $f(x_2, y) = 0$ with respect to y. Delete form they the roots y_1 and y_2.

step2: Add symbolic variables c_{ij} and define the expression

$$E = \sum_{i+j\le r} c_{ij} x^i y^j.$$

step3: Calculate the lists L of the equations

$$E|_{x=x_i, y\in R_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Add to it two equations

$$E(x_1, y_1) = (x_2 - x_1) f_y(x_1, y_1),$$
$$E(x_2, y_2) = (x_2 - x_1) f_y(x_2, y_2).$$

step3bis (optional): Symmetrization of the obtained equations.

step4: Solve the equations L with respect to c_{ij}. Substitute the solution in the expression E and return

$$\frac{E(x, y)dx}{(x - x_1)(x_2 - x) f_y(x, y)}.$$

Пример 1. *Рассмотрим эллиптическую кривую*

$$x^3 - y^3 + 2xy + x - 2y + 1 = 0 \qquad (3.3)$$

и найдем дифференциал 3-го типа с полюсами в двух точках с абсциссами $x = 0$ и $x = 1$. Прежде всего мы определим ординаты полюсов, взяв один из возможных вариантов. Первые три шага Алгоритма 1 реализованы в виде функции `iii_eqs`*, которая возвращает 6 линейных уравнений относительно шести неизвестных $c_0, \ldots, c_5$. Коэффициенты этих уравнений являются алгебраическими числами.*

Для решения этой системы уравнений мы не можем использовать стандартную функцию `solve`*, поскольку она не поддерживает работу с алгебраическими числами. Поэтому мы перешли к матрицам над полем алгебраических чисел и попытались решить систему линейных уравнений посредством функции* `solve_right`*. Однако и эта функция не справилась с этой системой за разумное количество времени, вернув предупреждение: increasing stack size to 32000000.*

Приведенный выше пример показывает, что даже в самом простом случае прямая реализация Algorithm 1 очень затратна. К счастью, система уравнений (3.1) ,(3.2) состоит из двух подсистем вида

$$E(x_i, y_i^{(j)}; c_0, \ldots) = b_{i,j}, \quad j = 1, 2, \ldots r, \qquad (3.4)$$

где $y_i^{(j)}$ — множество корней уравнения $f(x_i, y) = 0$ относительно y. Даже не уточняя вида правой части, мы можем получить из этой системы r следствий, симметричных относительно перестановок корней уравнения $f(x_i, y) = 0$:

$$\sum_{j=1}^{r} (y_i^{(j)})^k E(x_i, y_i^{(j)}; c_0, \ldots) = b_{i,j}, \quad k = 0, 1, \ldots r - 1. \qquad (3.5)$$

Коэффициенты при неизвестных в новой системе являются симметрическими функциям корней, поэтому будут рациональными числами, если таково рассматриваемое значение x_i, поэтому для решения новой системы достаточно обратить матрицу с рациональными коэффициентами. Система (3.5) эквивалентна исходной системе (3.4), поскольку новая система получает из старой путем умножения на матрицу Вандермонда

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (y_i^{(1)})^{r-1} & \cdots & (y_i^{(r)})^{r-1} \end{pmatrix},$$

определитель которой в рассматриваемом случае простых корней не равен нулю. Описанный переход от двух подсистем к симметризованным подсистемам мы будем называть симметризацией СЛАУ и всегда выполнять перед применением метода Гаусса (шаг 3bis в Алгоритме 1).

Пример 2. *Вернемся к примеру 1. Реализовав первые 3 шага и симметризацию в виде функции* `iii_eqs_sym`*, мы получим шесть линейных уравнений с шестью неизвестными $c_0, \ldots, c_5$, коэффициенты которой должны быть рациональными числами. Однако в ходе компьютерного эксперимента стали хорошо заметны огрехи в реализации поля алгебраических чисел: один из коэффициентов не опознается как рациональный. При этом при работе алгебраическими числами ошибка округления отсутствует и убедиться в его рациональности можно, вычислив его минимальный многочлен.*

Симметризованная СЛАУ решается без заметных затрат времени. Для удобства мы сделали свою функцию `lsolve`*, которая приводит уравнения к матричной форме и решает их с помощью функции* `solve_right`*:*

```
sage: lsolve(eqs,[c0,c1,c2,c3,c4,c5])
[c0 == -2.205569430400590?,
c1 == -0.4533976515164038?,
c2 == -1, c3 == 0.1254856073486862?,
c4 == -0.9888519187910046?,
c5 == 0]
```

Эта функция, как и сама функция `solve_right`*, возвращает частное решение. Полностью весь алгоритм 1 реализован в виде функции* `iii`*, которая возвращает дифференциал 3-го типа, определенный с точностью до линейной комбинации дифференциалов 1-го типа. В рассматриваемом примере получается вполне обозримое выражение:*

```
sage: iii(f,[x1,y1],[x2,y2])
( -0.988?* x * y - y ^2 + 0.125?* x
- 0.453?* y - 2.205?) * dx
/((3* y ^2 - 2* x + 2) *( x - 1) * x)
```

Замечание. Используемые в Sage обозначения рождают подозрения, что здесь ведутся вычисления с ошибками округления. Напомним, что в системе Sage знак ? после десятичной дроби означает, что это число рассматривается как алгебраическое число. Для отображения на экране указывается его приближенное значение в виде десятичной дроби, однако пользователь в любой момент может запросить минимальный многочлен для этого числа.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог сказанному, можно утверждать, что имплименатция поля алгебраических чисел в Sage действительно позволяет, по крайней мере в несложных примерах, реализовывать алгоритмы Вейерштрасса почти так, как они описаны в его Лекциях. При этом, однако, важно проводить симметризацию всюду, где это возможно. В противном случае получить ответ за разумное время не удается.

Для эффективной реализации метода построения дифференциала третьего рода, предложенного в Лекциях Вейерштрасса, необходимо выполнить симметризацию задачи (шаг 3bis в Алгоритме 1). В нашем пакете симметризация выполняется с помощью встроенных в Sage инструментов для работы с симметрическими функциями [14]. Следует заметить, что эти инструменты разрабатывались для нужд теории представления симметрических групп и используют многочисленные наработки из современной комбинаторики, которых не было во времена Вейерштрасса. Мы полагаем, что успехи современной комбинаторики и позволяют превратить методы, описанные в лекциях Вейерштрасса, в эффективные алгоритмы.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы признательны проф. Л.А. Севастьянову (РУДН) за внимание к своей работе и важные замечания, позволившие существенно улучшить текст статьи.

ИСТОЧНИК ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20257).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Moses J.* Symbolic Integration: The Stormy Decade // Communications of the ACM. 1971. V. 14. № 8. P. 548–560.
2. *Bronstein M.* Symbolic Integration I. Transcendental Functions. Springer, 2005.
3. *Parisse B.* Algorithmes de calcul formel, 2011. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr.
4. *Baker H.F.* Abelian Functions: Abel's Theorem and the Allied Theory of Theta Functions. Cambridge university press, 2005. ISBN: 9780521498777.
5. *Davenport J.H.* On the Integration of Algebraic Functions. Berlin-Heidelberg: Springer, 1982.
6. *Trager Barry M.* On the Integration of Algebraic Functions. PhD thesis, MIT, 1984.
7. *Bronstein M.* Symbolic Integration Tutirial. ISSAC'98, Rostock (August 1998) and Differential Algebra Workshop, Rutgers November 2000, 1998.
8. *Malykh M.D., Sevastianov L.A., Ying Yu.* On symbolic integration of algebraic functions // Journal of Symbolic Computation. 2021. V. 104. P. 563–579.
9. *Покровский П.М.* О рациональных функциях эллиптического образа // Мат. сб. 1900. V. 21. P. 387–430. http://mi.mathnet.ru/msb6708
10. *Weierstrass K.* Math. Werke. Berlin: Mayer & Müller, 1902. Vol. 4.
11. *Кочина П.Я.* Карл Вейерштрасс (1815–1897). М.: Наука, 1985.
12. *van Hoeij M.* An algorithm for computing an integral basis in an algebraic function field // J. of Symbolic Computation. 1994. Vol. 18. P. 353–363.
13. *Malykh M., Ying Yu.* Package Weierstrass for Sage, 2021. https://malykhmd.neocities.org
14. The Sage Developers. Symmetric Functions, 2024. https://doc.sagemath.org

ON CALCULATION OF ABELIAN DIFFERENTIALS

M. D. Malykh[a,b], E. A. Airiyan[b], Yu. Ying[c]

[a] *Patrice Lumumba Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)*
ul. Miklukho-Maklaya 6, Moscow, 117198 Russia
[b] *Joint Institute for Nuclear Research*
Dubna, Moscow Region, 141980 Russia
[c] *Kaili University*
Kaiyuan Road 3, Kaili, 556011 China

This paper considers the construction of the fundamental function and Abelian differentials of the third kind on a plane algebraic curve over the field of complex numbers that has no singular points. The algorithm for constructing differentials of the third kind was described in Weierstrass's lectures. The paper discusses its implementation in the Sage computer algebra system. The specifics of this algorithm, as well as the very concept of the differential of the third kind, implies the use of both rational numbers and algebraic numbers, even when the equation of a curve has integer coefficients. Sage has a built-in tool for computations in algebraic number fields, which allows the Weierstrass algorithm to be implemented almost literally. The simplest example of an elliptic curve shows that it requires too many resources, far beyond the capabilities of an office computer. A symmetrization of the method is proposed and implemented, which makes it possible to solve the problem while saving a significant amount of computational resources.

Keywords: computer algebra, symbolic integration, algebraic functions

5. REFERENCES

1. *Moses J.* Symbolic integration: The stormy decade, Commun. ACM, 1971, vol. 14, no. 8, pp. 548–560.
2. *Bronstein M.* Symbolic Integration I. Transcendental Functions, Springer, 2005.
3. *Parisse B.* Algorithmes de calcul formel, 2011. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr
4. *Baker H.F.* Abelian Functions: Abel's Theorem and the Allied Theory of Theta Functions, Cambridge University Press, 2005.
5. *Davenport J.H.* On the Integration of Algebraic Functions, Berlin-Heidelberg: Springer, 1982.
6. *Trager B.M.* On the integration of algebraic functions, PhD Thesis, MIT, 1984.
7. *Bronstein M.* Symbolic integration tutorial, Proc. ISSAC and Differential Algebra Workshop, 1998.
8. *Malykh M.D., Sevastianov L.A., Ying Yu.* On symbolic integration of algebraic functions, J. Symbol. Comput., 2021, vol. 104, pp. 563–579.
9. *Pokrovskii P.M.* On rational functions of elliptic image, Mat. Sb., 1900, vol. 21, pp. 387–430. http://mi.mathnet.ru/msb6708
10. *Weierstrass K.* Math. Werke, Berlin: Mayer & Muller, 1902, vol. 4.
11. *Kochina P.Ya.* Karl Veiershtrass (1815–1897), Moscow: Nauka, 1985.
12. *van Hoeij M.* An algorithm for computing an integral basis in an algebraic function field, J. Symbol. Comput., 1994, vol. 18, pp. 353–363.
13. *Malykh M., Ying Yu.* Package Weierstrass for Sage, 2021. https://malykhmd.neocities.org
14. Sage developers, Symmetric functions, 2024. https://doc.sagemath.org