

КОНСТРУКТИВНАЯ КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА И ВЫЧИСЛЕНИЯ С КОНЕЧНЫМИ ГРУППАМИ

© 2025 г. В. В. Корняк^{а,*}

^аОбъединенный институт ядерных исследований
141980 Дубна, Московская область, Россия

*E-mail: vkornyak@gmail.com

Поступила в редакцию 01.08.2024 г.

После доработки 31.08.2024 г.

Принята к публикации 22.09.2024 г.

Рассматривается применение методов компьютерной алгебры и вычислительной теории групп для исследования проблем, возникающих в контексте конструктивной квантовой механики.

Ключевые слова: конструктивная квантовая механика, вычисления с конечными группами

DOI: 10.31857/S0132347425010028, **EDN:** DXSGII

1. ВВЕДЕНИЕ

Конструктивную версию физической теории можно построить, заменив бесконечные множества, присутствующие в формализме теории, конечными. Такая замена не создаст проблем с описанием эмпирической реальности, если использовать достаточно большие конечные множества.

Стандартная квантовая механика базируется на непрерывных подгруппах общей унитарной группы, т. е. на унитарных представлениях групп Ли. Непрерывная унитарная группа выполняет двойную функцию в квантовой механике. С одной стороны, она является источником элементов, генерирующих эволюции замкнутых квантовых систем. С другой стороны, она представляет собой группу симметрий квантовых систем.

В данной работе мы обращаемся к версии квантовой механики, где вместо групп Ли применяются конечные группы [1, 2]. В частности, для описания унитарной эволюции вместо непрерывной однопараметрической группы используется конечная группа циклических перестановок. При этом необходимо учитывать дополнительные условия, обеспечивающие воспроизведение квантовых интерференций. Это приводит к конечной группе, известной как группа Вейля–Гейзенберга. Элементы этой группы, называемые операторами сдвига, порождают все возможные квантовые эволюции в конструктивном контексте.

В данном контексте группой симметрий квантовых систем также выступает конечная груп-

па, известная как группа Клиффорда. Эта группа представляет собой группу автоморфизмов группы Вейля–Гейзенберга.

Замена непрерывных групп конечными имеет ряд преимуществ:

- Такие наблюдаемые свойства квантовых систем, как унитарность, возможность квантовых интерференций и запутанности только между частицами одного типа, получают естественное объяснение.
- Каноническое разложение квантовой системы на подсистемы определяется структурой конечной группы, описывающей унитарную эволюцию системы.
- Конечные группы позволяют выявить тонкие детали поведения квантовых систем, которые в принципе невозможно сформулировать в терминах непрерывных групп.

Отказ от непрерывной унитарной симметрии предполагает модификацию понятия квантовых состояний. С помощью компьютерных вычислений мы изучаем возможный подход к построению конструктивных квантовых состояний, основанный на учете симметрий состояний относительно группы Клиффорда и требования рациональности борновских вероятностей переходов между состояниями в соответствии с естественной в конструктивном контексте частотной интерпретацией вероятности.

Каноническое разложение квантовых систем в соответствии со структурой циклической группы перестановок показывает, что существенно квантовое поведение проявляется только в компонентах, размерности гильбертовых пространств которых являются нетривиальными степенями простых чисел. Мы будем называть такие размерности *примарными*. В примарных размерностях поведение квантовых систем описывается с помощью полей Галуа, и проблемы с мультипликативной необратимостью в модулярных кольцах, характерные для составных размерностей, не возникают. Ввиду громоздкости формул, включающих поля Галуа, мы чаще всего будем приводить формулы, справедливые для простых размерностей. Часть этих формул справедливы также и для составных размерностей.

2. ОПИСАНИЕ КВАНТОВОЙ ЭВОЛЮЦИИ КОНЕЧНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

В стандартной квантовой механике эволюция замкнутой системы описывается уравнением Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle,$$

где H — оператор Гамильтона, порождающий унитарное представление непрерывной однопараметрической группы, элементы которого можно представить в виде

$$U_t = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = \left(e^{-i\frac{H}{\hbar}} \right)^t = E^t. \quad (2.1)$$

Без всяких потерь для описания физической реальности [3] мы можем, выбрав достаточно большое натуральное число N , предположить, что оператор E , порождающий эволюцию (2.1), является элементом представления конечной циклической группы \mathbb{Z}_N . В этом случае, естественно, время t является не непрерывным, а целочисленным параметром.

Конечные группы имеют ряд существенных преимуществ по сравнению с группами Ли при описании физических задач. В частности, любые линейные представления конечных групп являются унитарными, что важно для квантовой теории. Любое линейное представление конечной группы является подпредставлением некоторого перестановочного представления. Поэтому вычисления с представлениями конечных групп можно, в принципе, свести к перестановкам. Конечные группы в сравнении с группами Ли обладают большими выразительными возможностями в прикладных задачах: группы Ли можно ап-

роксимировать конечными группами, но не наоборот. Для иллюстрации этого сравним свойства непрерывной и конечной циклических групп.

2.1. Непрерывная и конечная циклические группы

Единственной (компактной) циклической группой Ли является унитарная группа $U(1)$, стандартно реализуемая как единичная окружность в комплексной плоскости. В приложениях эту группу часто аппроксимируют конечной группой $U(1) \approx \mathbb{Z}_N$, выбрав число N достаточно большим¹.

Конечная циклическая группа \mathbb{Z}_N устроена гораздо сложнее группы $U(1)$. Если $N = n_1 n_2$ и $\gcd(n_1, n_2) = 1$, т. е. n_1 и n_2 — взаимно простые числа, то справедлив изоморфизм

$$\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}.$$

Проведя подобные разложения до конца, мы придем к изоморфизму

$$\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_{p_1}^{\ell_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_M}^{\ell_M}, \quad (2.2)$$

где $N = p_1^{\ell_1} \cdots p_M^{\ell_M}$, а p_1, \dots, p_M — различные простые числа; ℓ_1, \dots, ℓ_M — натуральные числа.

Топологически группа \mathbb{Z}_N представляет собой дискретный многомерный тор, топология которого напоминает топологию окружности $U(1)$ только если N — простое число.

Далее символ \mathbb{Z}_n будет обозначать в зависимости от контекста либо аддитивную группу кольца целых чисел по модулю n , либо само это кольцо.

Группа вида \mathbb{Z}_{p^ℓ} называется *примарной циклической группой*. В этом, основном для описания квантового поведения случае, элементам группы можно сопоставить элементы поля Галуа $\text{GF}(p^\ell)$, существенно отличающиеся от кольца \mathbb{Z}_{p^ℓ} , если $\ell > 1$. Переменные квантовой системы с числом степеней свободы $N = p^\ell$ принимают значения в поле $\text{GF}(p^\ell)$. Заметим, что простое поле $\text{GF}(p)$ и кольцо \mathbb{Z}_p изоморфны. Однако в простых размерностях невозможно описание квантовых систем, имеющих нетривиальные подсистемы.

2.2. Перестановочное представление \mathbb{Z}_N

Стандартным порождающим элементом *регулярного* представления группы \mathbb{Z}_N в N -мерном гильбертовом пространстве \mathcal{H}_N является матрица циклической перестановки

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

¹Фактически подобные аппроксимации лежат в основе дифференциального исчисления и анализа в целом.

Общепринятое обозначение X для этой матрицы связано с тем, что при $N = 2$ она совпадает с матрицей Паули σ_x :

$$X|_{N=2} = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Регулярное представление \mathbb{Z}_N порождается также любым элементом вида X^v при условии, что целое число v является мультипликативно обратимым элементом кольца \mathbb{Z}_N , т. е. $\text{gcd}(v, N) = 1$.

Базис в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_N

$$B_X = (|0\rangle, \dots, |N-1\rangle), \quad (2.4)$$

ассоциированный с матрицей X , называется базисом *координат* или *онтологическим* (т Хоофт [4]) или *вычислительным* (квантовая информатика) базисом.

Квантовый оператор координаты в базисе B_X имеет диагональный вид

$$\hat{x} = \sum_{x=0}^{N-1} x |x\rangle \langle x| = \text{diag}(0, 1, \dots, N-1).$$

Заметим, что эволюция оператора \hat{x} , порождаемая элементом вида $X_v = X^v$,

$$\hat{x}_t = X_v^t \hat{x}_0 X_v^{-t} \quad (2.5)$$

представляет собой “равномерное движение со скоростью v ”, поскольку в компонентах уравнение (2.5) имеет вид

$$x_t = x_0 + vt \pmod{N}.$$

2.3. Двойственное представление \mathbb{Z}_N

Двойственной по Понтрягину для абелевой группы A называется группа гомоморфизмов из A в единичную окружность на комплексной плоскости [5]:

$$\tilde{A} = \text{Hom}(A, U(1)).$$

Эти гомоморфизмы, называемые *характерами*, можно представить в виде

$$\chi(a) = \exp(2\pi i \varphi(a)),$$

где φ — вещественная функция на A , такая что $\varphi(a) + \varphi(b) = \varphi(ab)$ для $a, b \in A$.

Теорема Понтрягина утверждает, что для локально компактной абелевой группы A существует канонический изоморфизм $\tilde{\tilde{A}} \cong A$.

Если группа A конечна, то существует также изоморфизм $\tilde{\tilde{A}} \cong A$. Этот изоморфизм не является каноническим, так как он зависит от выбора порождающих элементов.

В частности, для порождающего элемента (2.3) регулярного представления группы \mathbb{Z}_N порождающий элемент двойственного представления в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_N можно выбрать в виде

$$Z = \tilde{Z} = F X F^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega^{N-1} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Здесь и всюду далее $\omega = e^{2\pi i/N}$ — примитивный корень из единицы N -й степени; F — матрица Фурье, элементы которой имеют вид

$$F_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{ij}, \quad i, j = 0, \dots, N-1. \quad (2.7)$$

Матрица Z является обобщением матрицы Паули σ_z :

$$Z|_{N=2} = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Базис в пространстве \mathcal{H}_N , двойственный базису (2.4),

$$B_Z = \left(\langle \tilde{0} |, \langle \tilde{1} |, \dots, \langle \tilde{N-1} | \right)^T, \quad (2.8)$$

называется *базисом импульсов*. В этом базисе квантовый оператор импульса имеет диагональный вид:

$$\hat{p} = \sum_{p=0}^{N-1} p |\tilde{p}\rangle \langle \tilde{p}| = \text{diag}(0, 1, \dots, N-1).$$

2.4. Описание квантовых интерференций

Индивидуальное квантовое состояние не зависит от произвольного фазового множителя, однако при сложении различных квантовых состояний фазовые множители приводят к физически наблюдаемым последствиям, называемым интерференциями.

Отдельная унитарная эволюция не в состоянии воспроизвести интерференции. Математически это выражается в том, что циклическая группа, непрерывная или дискретная, не имеет нетривиальных проективных представлений, необходимых для описания фазовых эффектов.

В нашем случае операторы X и Z порождают проективное представление группы

$$\mathbb{Z}_N \times \tilde{\mathbb{Z}}_N \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N$$

в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_N . Прямое вычисление приводит к каноническому коммутационному соотношению Вейля

$$ZX = \omega XZ. \quad (2.9)$$

Герман Вейль [6] получил операторы X и Z и коммутационное соотношение (2.9) в рамках стандартной непрерывной квантовой механики. Он обратил внимание на то, что каноническое коммутационное соотношение Гейзенберга для операторов координаты и импульса

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \mathbb{1},$$

а следовательно, и стандартную квантовую теорию в целом, можно реализовать только в бесконечномерном гильбертовом пространстве.

Вейль показал, что из требования конечной размерности с необходимостью следуют операторы X и Z с коммутационным соотношением (2.9), а также доказал их единственность.

2.5. Взаимно несмещенные базисы

Базисы (2.4) и (2.8), ассоциированные с операторами X и Z , являются *взаимно несмещенными*, т. е. борновские вероятности переходов между элементами разных базисов одинаковы для любых пар элементов:

$$|\langle \tilde{\ell} | k \rangle|^2 = \frac{1}{N}, \quad \ell, k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Это означает, что квантовое состояние, точно соответствующее некоторому элементу одного из базисов, т. е. соответствующее измерение даст полную информацию о состоянии, при измерении в другом базисе приведет к результатам, разбросанным с равной вероятностью по всем элементам этого базиса, т. е. мы не получим никакой информации.

Фактически, понятие взаимно несмещенных базисов, впервые четко сформулированное Швингером [7], представляет собой математическую формализацию принципа дополнительности Бора.

2.6. Формализм Вейля–Швингера

Идеи Вейля [6] и Швингера [7] в последние годы активно развиваются в различных научных областях, включая основания квантовой теории, квантовую информатику [8] и теорию обработки сигналов [9]. Опишем основные элементы формализма, где ключевую роль играют конечные группы. Мы будем подразумевать случай кольца \mathbb{Z}_N . Для размерностей $N = p^\ell$ с $\ell > 1$ необходимы модификации в терминах полей Галуа, которые мы кратко упомянем ниже.

Группа Вейля–Гейзенберга состоит из всевозможных произведений операторов X и Z и корней

из единицы степени \bar{N} , где $\bar{N} = N$, если N нечетное, и $\bar{N} = 2N$, если N четное. Воспользовавшись перестановочным соотношением, элементы группы можно привести к стандартному виду:

$$\text{WH}(N) = \{\tau^k X^v Z^m\}, \quad k, v, m \in \mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

Здесь и далее $\tau = -\omega^{1/2} = -e^{\pi i/N}$. Типично элементы группы (2.10) имеют период N , однако при четном N четверть элементов имеют удвоенный период $2N$. Группу (2.10) удобнее описывать в терминах операторов сдвига, периоды которых всегда равны N .

Оператор сдвига определяется как

$$D_{\mathbf{p}} = \tau^{p_1 p_2} X^{p_1} Z^{p_2}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^2.$$

Формула композиции операторов сдвига имеет вид

$$D_{\mathbf{p}} D_{\mathbf{q}} = \tau^{\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle} D_{\mathbf{p}+\mathbf{q}},$$

где $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle$ – симплектическая форма;

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = p_2 q_1 - p_1 q_2 = \mathbf{p}^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q}. \quad (2.11)$$

N^2 операторов сдвига образуют проективную группу Вейля–Гейзенберга $\mathbf{PWH}(N)$, являющуюся факторгруппой $\text{WH}(N)$ по ее центру, т. е. по группе корней из единицы. Как абстрактная группа $\mathbf{PWH}(N)$ изоморфна произведению двух циклических групп:

$$\mathbf{PWH}(N) \cong \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N.$$

Конечное фазовое пространство представляет собой двумерный дискретный тор

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{Z}_N \times \mathbb{Z}_N,$$

снабженный симплектической структурой (2.11).

Операторы сдвига на этом торе порождают квантовые эволюции. В частности, сдвиги вдоль образующих, $D_{(v,0)} = X^v$ и $D_{(0,m)} = Z^m$, порождают эволюции Шредингера соответственно в “координатном” $|\psi_t\rangle = (X^v)^t |\psi_0\rangle$ и “импульсном” $|\psi_t\rangle = (Z^m)^t |\psi_0\rangle$ представлениях.

Преобразования фазового пространства, сохраняющие симплектическую форму (2.11), образуют симплектическую группу $\text{Sp}(2, \mathbb{Z}_N)$. Эти преобразования являются квантовым прототипом канонических преобразований в гамильтоновой механике.

Группа Клиффорда является полупрямым произведением группы Вейля–Гейзенберга с группой симплектических преобразований конечно-го фазового пространства:

$$CL(N) \cong WH(N) \rtimes Sp(2, \mathbb{Z}_N).$$

Обычно группу Клиффорда определяют как нормализатор группы Вейля–Гейзенберга в общей унитарной группе $U(N)$.

Мы откажемся от использования непрерывной унитарной группы ввиду ее неконструктивности. Необходимость в непрерывной унитарной группе не следует ни из описания квантовой эволюции с помощью конечных циклических групп, ни из построений Вейля.

Таким образом, мы будем рассматривать группу Клиффорда исключительно как группу симметрий конечной группы Вейля–Гейзенберга, т. е. $CL(N) = \text{Aut}(WH(N))$, не прибегая к ссылке на непрерывную унитарную группу.

Замечания о вычислениях с группами. Обычно группы содержат большое число элементов, однако в большинстве вычислений достаточно итеративного применения очень небольшого числа элементов, порождающих группу. Например, группа Вейля–Гейзенберга (2.10) размера $\bar{N}N^2$ порождается тремя элементами: матрицами X, Z и корнем из единицы τ . Символически это выражается равенством

$$WH(N) = \langle \tau, X, Z \rangle. \quad (2.12)$$

Порождающее множество для группы Клиффорда получается добавлением к порождающему множеству группы Вейля–Гейзенберга (2.12) матрицы Фурье (2.7) и диагональной матрицы вида [9]

$$S_{ii} = \tau^{i(i+N)} \Big|_{i=0}^{N-1}, \quad \tau = -\omega^{1/2} = -e^{\pi i/N}.$$

Однако элемент τ порождает циклическую группу корней из единицы

$$K_{\bar{N}} = \left\{ e^{\frac{2\pi i}{\bar{N}}k} \right\}_{k=0}^{\bar{N}-1}, \quad (2.13)$$

которая является центром группы Вейля–Гейзенберга. Центр группы Клиффорда, который возникает автоматически при ее построении из образующих, содержит (2.13) в качестве подгруппы. Поэтому необходимость в элементе τ отпадает. Кроме того, элемент Z также можно отбросить ввиду соотношения $Z = FXF^{-1}$. Таким образом, задача построения группы Клиффорда из образующих сводится к соотношению

$$CL(N) = \langle X, F, S \rangle.$$

Заметим, что удаление “лишних” образующих приводит к определенным вычислительным преимуществам. Например, построение полного множества 2592 элементов группы $CL(3)$ с помощью системы Maple на ПК с частотой 3.3 ГГц занимает 70.766 с для задачи $CL(3) = \langle X, Z, F, S \rangle$ и 52.344 с для задачи $CL(3) = \langle X, F, S \rangle$.

Кроме того, гораздо практичнее проводить вычисления, оставаясь в рамках проективной группы Клиффорда, которая является факторгруппой группы Клиффорда по ее центру:

$$PCL(N) = CL(N) / K_m.$$

Проективная группа Клиффорда порождается теми же элементами, что и $CL(N)$:

$$PCL(N) = \langle X, F, S \rangle, \quad (2.14)$$

однако при вычислениях все матрицы, отличающиеся только фазовым множителем, рассматриваются как эквивалентные. При этом никаких потерь информации о группе $CL(N)$ не произойдет, поскольку в алгоритмах легко учесть элементы центра. В частности, несложно написать алгоритм построения группы из образующих с одновременным вычислением центра. Например, построение полного множества элементов группы $PCL(3)$ с одновременным вычислением центра занимает 1.219 с. Центр, получаемый в процессе вычислений, представляет собой группу корней из единицы 12-й степени K_{12} .

2.7. Примарные размерности

Для размерностей $N = p^\ell$ с $\ell > 1$ необходимы модификации приведенных выше конструкций в терминах полей Галуа. Кратко рассмотрим основные элементы, с помощью которых можно построить группы Вейля–Гейзенберга и Клиффорда в примарных размерностях.

Вычеты по модулю простого числа, \mathbb{Z}_p , образуют поле, которое называется *простым*, поскольку не содержит собственных подполей.

Поле Галуа² $GF(p^\ell)$ называется расширением поля \mathbb{Z}_p с помощью корня ε неприводимого полинома степени ℓ над полем \mathbb{Z}_p :

$$\Phi(x) = \phi_0 + \phi_1 x + \dots + \phi_{\ell-1} x^{\ell-1} + x^\ell, \quad (2.15)$$

где $\phi_0, \dots, \phi_{\ell-1} \in \mathbb{Z}_p$; $\Phi(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$. То есть элемент ε представляет собой решение сравнения

$$\Phi(\varepsilon) = 0 \pmod{p}.$$

²Подробные сведения о полях Галуа приведены в справочнике [11].

Любое конечное поле является полем Галуа, поэтому для его обозначения часто используют символ \mathbb{F}_{p^ℓ} . В частности, вместо \mathbb{Z}_p можно писать \mathbb{F}_p .

Произвольный элемент поля Галуа (“число Галуа”) имеет вид

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \dots + \alpha_{\ell-1} \varepsilon^{\ell-1}, \quad (2.16)$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_{\ell-1} \in \mathbb{F}_p$; $\alpha \in \mathbb{F}_{p^\ell}$.

Числа Галуа образуют ℓ -мерное линейное векторное пространство над простым полем \mathbb{F}_p , и сложение в поле Галуа совпадает со сложением в этом векторном пространстве. Умножение чисел Галуа выполняется как умножение полиномов по модулю полинома (2.15), т. е. степени ε , превышающие $\ell - 1$, устраниваются подстановками с помощью соотношения $\Phi(\varepsilon) = 0$.

Заметим, что если подставить p вместо ε в выражение (2.16), то мы получим запись натурального числа в p -ричной позиционной системе счисления. Таким образом, у нас имеется взаимно однозначное соответствие между p^ℓ элементами поля Галуа и целыми числами в интервале от 0 до $p^\ell - 1$. Это соответствие дает определенные технические удобства в компьютерных реализациях: можно использовать целые числа вместо более сложных представлений элементов поля Галуа, например, представлений полиномами или массивами.

Важным элементом теории полей Галуа является отображение \mathbb{F}_{p^ℓ} в простое подполе \mathbb{F}_p , называемое следом. След числа Галуа $\alpha \in \mathbb{F}_{p^\ell}$ определяется как

$$\text{tr}(\alpha) = \alpha + \alpha^p + \dots + \alpha^{p^{\ell-1}} \in \mathbb{F}_p.$$

Степени свободы квантовой системы в примарной размерности описываются числами Галуа. Обобщенные матрицы Паули (аналоги X и Z , ассоциированные с каждой степенью свободы) и коммутационное соотношение Вейля имеют вид

$$\begin{aligned} X_\alpha &= \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_{p^\ell}} |\gamma + \alpha\rangle \langle \gamma|; \\ Z_\beta &= \sum_{\gamma \in \mathbb{F}_{p^\ell}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \text{tr}(\beta\gamma)\right) |\gamma\rangle \langle \gamma|; \\ Z_\beta X_\alpha &= \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \text{tr}(\alpha\beta)\right) X_\alpha Z_\beta, \end{aligned}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{p^\ell}$. Преобразование Фурье имеет вид

$$F = \frac{1}{\sqrt{p^\ell}} \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{F}_{p^\ell}} \exp\left(\frac{2\pi i}{p} \text{tr}(\alpha\beta)\right) |\alpha\rangle \langle \beta|.$$

Представление (2.16) задает взаимно однозначное соответствие между элементами поля \mathbb{F}_{p^ℓ} и точками декартового произведения ℓ экземпляров простого поля \mathbb{F}_p . Это соответствие используется для представления гильбертова пространства квантовой системы, состоящей из ℓ идентичных частиц, в виде тензорного произведения гильбертовых пространств элементарных составляющих:

$$\mathcal{H}_{p^\ell} \cong \overbrace{\mathcal{H}_p \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_p}^{\ell}. \quad (2.17)$$

Соответствие между базисными элементами гильбертовых пространств многочастичной системы и ее элементарных составляющих

$$|\alpha\rangle \leftrightarrow |\alpha_0\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_{\ell-1}\rangle$$

вытекает из равенства (2.16).

Если целое число $1 < n < \ell$ делит ℓ , то поле Галуа \mathbb{F}_{p^n} является нетривиальным подполем поля \mathbb{F}_{p^ℓ} :

$$\mathbb{F}_p < \mathbb{F}_{p^n} < \mathbb{F}_{p^\ell}.$$

В этом случае поле \mathbb{F}_{p^ℓ} можно построить как расширение над \mathbb{F}_{p^n} по той же схеме, что и над простым полем \mathbb{F}_p , т. е. представить элементы \mathbb{F}_{p^ℓ} векторами (ℓ/n) -мерного линейного пространства, базисными элементами которого являются степени корня неприводимого полинома над \mathbb{F}_{p^n} . Такое представление позволяет разложить квантовую систему – в отличие от разложения (2.17), где составляющие частицы принципиально бесструктурны – на более сложно устроенные идентичные частицы:

$$\mathcal{H}_{p^\ell} \cong \overbrace{\mathcal{H}_{p^n} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{p^n}}^{\ell/n}. \quad (2.18)$$

3. РАЗЛОЖЕНИЕ N -МЕРНОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ НА ПОДСИСТЕМЫ

Использование непрерывных унитарных групп в качестве групп симметрии квантовых систем может привести к артефактам. Например, глобальная унитарная симметрия в составной системе должна приводить к квантовой интерференции и запутанности между частицами различных типов, чего в реальности не наблюдается.

3.1. Группа Клиффорда вместо общей унитарной группы

Разложение (2.2) группы \mathbb{Z}_N индуцирует разложение N -мерного гильбертова пространства в тензорное произведение пространств взаимно простых неприводимых размерностей:

$$\mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{n_M}, \quad (3.1)$$

где $n_1 = p_1^{\ell_1}, \dots, n_M = p_M^{\ell_M}$ — степени различных простых чисел.

Если предположить, как это принято, что фундаментальные симметрии квантовых систем включают произвольные унитарные преобразования, то свободу выбора координат в соотношении (3.1) можно символически представить в виде

$$U(N) \mathcal{H}_N = U(n_1) \mathcal{H}_{n_1} \otimes \dots \otimes U(n_M) \mathcal{H}_{n_M}.$$

Это соотношение, воспользовавшись тождеством для тензорных произведений

$$AX \otimes BY = (A \otimes B)(X \otimes Y)$$

и тем фактом, что произведение локальных групп является подгруппой глобальной группы

$$U(n_1) \times \dots \times U(n_M) < U(N),$$

можно переписать в виде

$$U(N) \mathcal{H}_N = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{n_M}.$$

Таким образом, группа $U(N)$ свободно “перемешивает” состояния между различными компонентами тензорного произведения, что привело бы к таким эффектам, как, например, запутанные кубит-кутрит пары.

Проблемы подобного рода не возникают, если предположить, что симметрии квантовых систем описываются группами Клиффорда. Это обусловлено тем, что в группе Клиффорда глобальной системы отсутствуют преобразования, которые могли бы перемешать состояния между локальными гильбертовыми пространствами взаимно простых размерностей.

Математически это выражается тем фактом, доказываемым с помощью китайской теоремы об остатках [10], что глобальная группа Клиффорда разлагается в прямое произведение локальных

$$CL(N) = CL(n_1) \times \dots \times CL(n_M).$$

3.2. Китайская теорема об остатках

Китайская теорема об остатках позволяет построить изоморфизм колец

$$\mathbb{Z}_N \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_M}$$

при условии, что $N = n_1 \dots n_M$ и $\gcd(n_i, n_j) = 1$. Элементу $k \in \mathbb{Z}_N$ ставится в соответствие набор элементов $r_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$, вычисляемых как остатки от деления:

$$r_i = k \bmod n_i. \quad (3.2)$$

По набору r_1, \dots, r_M элемент $k \in \mathbb{Z}_N$ восстанавливается по формуле

$$k = \sum_i r_i N_i^{-1} N_i \bmod N, \quad (3.3)$$

где $N_i = N/n_i \in \mathbb{Z}_N$, $N_i^{-1} \in \mathbb{Z}_{n_i}$ — мультипликативное обратное числа N_i , интерпретируемого как элемент кольца \mathbb{Z}_{n_i} .

Вместо остатков, определяемых равенствами (3.2), для восстановления $k \in \mathbb{Z}_N$ можно использовать другие элементы локальных колец, а именно $k_i \equiv r_i N_i^{-1} \in \mathbb{Z}_{n_i}$. В этом случае из отображения (3.3) следует равенство

$$k = \sum_i k_i N_i \bmod N, \quad (3.4)$$

называемое дуальным отображением.

С помощью отображений (3.3) и (3.4) можно вычислять соотношения между квантовыми числами системы, допускающей разложение (3.1), и квантовыми числами ее подсистем.

Например, из дуального отображения (3.4) можно вывести равенство

$$\frac{k}{N} = \sum_i \frac{k_i}{n_i} \bmod 1, \quad (3.5)$$

описывающее аддитивность энергии в составной системе. А именно, оператор эволюции системы равен тензорному произведению операторов эволюции ее подсистем. Из чего для собственных чисел операторов эволюции следует соотношение

$$\exp(-iE_{N,k}) = \exp(-iE_{n_1,k_1}) \dots \exp(-iE_{n_M,k_M}).$$

Учитывая формулу Планка $E = h\nu$, согласно которой уровни энергии представляют собой частоты, можно получить равенство

$$\exp\left(2\pi i \frac{k}{N}\right) = \exp\left(2\pi i \frac{k_1}{n_1}\right) \dots \exp\left(2\pi i \frac{k_M}{n_M}\right),$$

логарифмирование которого приводит к (3.5).

3.3. Разложение на подсистемы в примарных размерностях

В разложении квантовой системы на подсистемы взаимно простых размерностей (3.1), получаемое с помощью китайской теоремы об остатках, отсутствуют квантовые запутанности между подсистемами. Это означает, что при любых эволюциях системы возможны лишь квантовые состояния, являющиеся тензорным произведением состояний подсистем (или их классические комбинации, называемые сепарабельными состояниями).

В случае примарных размерностей разложения квантовых систем с помощью полей Галуа — соответствующие разложения гильбертовых пространств представлены в (2.17) и (2.18) — демонстрируют существенно квантовое поведение. В частности, в процессе эволюции квантовые состояния переходят из запутанных в факторизованные и наоборот, образуя сложные комбинации тех и других.

4. КОНСТРУКТИВНЫЕ КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

В непрерывной квантовой механике множество чистых состояний в N -мерном гильбертовом пространстве является комплексное проективное пространство

$$\mathbf{P}(\mathcal{H}_N) = \mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1},$$

представляющее собой однородное пространство унитарной группы $U(N)$. То есть множество чистых состояний можно представить как орбиту произвольного единичного вектора, например $|0\rangle$, относительно действия унитарной группы:

$$\mathbb{C}\mathbf{P}^{N-1} \cong \text{Orb}_{U(N)}(|0\rangle) = U(N)|0\rangle.$$

В нашем подходе группой симметрий квантовых систем является конечная группа Клиффорда, которая действует на множестве квантовых состояний нетранзитивно, разбивая его на непесекающиеся множества — орбиты.

Мы предполагаем, что конструктивное множество состояний может быть построено как объединение орбит группы Клиффорда относительно действия на чистые состояния. Это объединение должно включать “онтологические” векторы $|0\rangle, \dots, |N-1\rangle$. Кроме того, борновские вероятности переходов между конструктивными квантовыми состояниями должны быть рациональными числами в соответствии с естественной в конструктивном контексте частотной интерпретацией вероятности.

Одним из вариантов этого подхода, удобным для компьютерной реализации, может быть последовательное построение состояний. Начальные состояния строятся как орбита вектора $|0\rangle$. Затем повторяется процесс добавления новых состояний, сводящийся к получению квантовых суперпозиций уже имеющихся состояний и отбору тех суперпозиций, вероятности перехода к которым рациональны. Рассматриваются только квантовые суперпозиции, фазовые множители в которых являются корнями из единицы, принадлежащими центру группы Клиффорда. Таким образом, мы не вносим никаких новых посторонних элементов в конструкцию.

Компьютерные эксперименты, вероятно, свидетельствуют о том, что подобный подход ведет к образованию плотного подмножества в множестве чистых состояний непрерывной квантовой механики.

Пример $N = 2$. Рассмотрим пример вычислений, следуя описанной выше процедуре, для случая минимальной размерности $N = 2$. В этой размерности результаты вычислений можно продемонстрировать наглядно, поскольку непрерывные чистые состояния образуют комплексную проективную прямую $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$, которую можно представить в виде двумерной сферы Римана (называемой также сферой Блоха).

В данном случае мы имеем следующий набор матриц, порождающих группу Клиффорда:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Порядок группы Клиффорда $CL(2)$ равен 192. Центром $CL(2)$ является группа корней из единицы 8-й степени:

$$K_8 = \left\{ e^{\frac{\pi i}{4}k} \right\}_{k=0}^7 = \left\{ \pm 1, \pm i, \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\}.$$

Соответственно проективная группа Клиффорда $\mathbf{P}CL(2) = CL(2)/K_8$ имеет порядок 24. Квантовые состояния с разными фазовыми множителями не различаются, поэтому размеры орбит не могут превышать число 24 и являются делителями этого числа.

Орбита вектора $|0\rangle$

$$\text{Orb}_{CL(2)}|0\rangle = CL(2)|0\rangle = \mathbf{P}CL(2)|0\rangle$$

состоит из шести векторов, взаимно ортогональные пары которых образуют полное множество взаимно несмещенных базисов в размерности два³:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= (|0\rangle, |1\rangle), \\ \mathcal{B}_2 &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right), \\ \mathcal{B}_3 &= \left(\frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}}, \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

³В любой размерности вида $N = p^\ell$, всегда существует максимально возможное число взаимно несмещенных базисов $N + 1$. Измерений относительно векторов из этих базисов достаточно для полного восстановления любого, чистого или смешанного, квантового состояния.

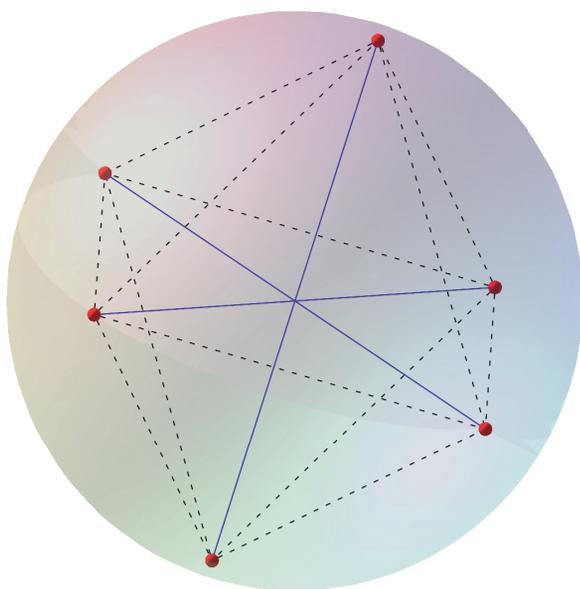


Рис. 1. Вершины октаэдра образуют орбиту оптического вектора относительно группы Клиффорда. Пары противоположных вершин описывают полный набор взаимно несмещенных базисов.

На рис. 1 эти шесть векторов образуют вершины октаэдра, а пространственные диагонали октаэдра представляют три взаимно несмещенных базиса (противоположные точки диаметров сферы Блоха представляют взаимно ортогональные векторы).

Интерференции вида $|\psi_1\rangle + \varphi|\psi_2\rangle$, где $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \text{Orb}_{\text{CL}(2)}|0\rangle$, а $\varphi \in \mathbb{K}_8$, образуют 48 векторов, половина из них отбраковывается из-за “несоизмеримости” между собой и с остальными, т.е. борновские вероятности переходов оказываются иррациональными. Оставшиеся состояния образуют орбиту группы Клиффорда размера 24. На рис. 2 показано дополненное этими векторами множество состояний с рациональными вероятностями переходов.

Следующий шаг приводит к добавлению состояний, образующих 16 орбит размера 24. Результат этого добавления представлен на рис. 3.

Векторы интерференций $|\psi_1\rangle + \varphi|\psi_2\rangle$ лежат в плоскости, расположенной строго между $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$, поэтому можно предположить, что описываемое построение может в пределе привести к плотному на сфере Блоха множеству состояний.

Пример $N = 3$. Матрицы, порождающие группу Клиффорда:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix},$$

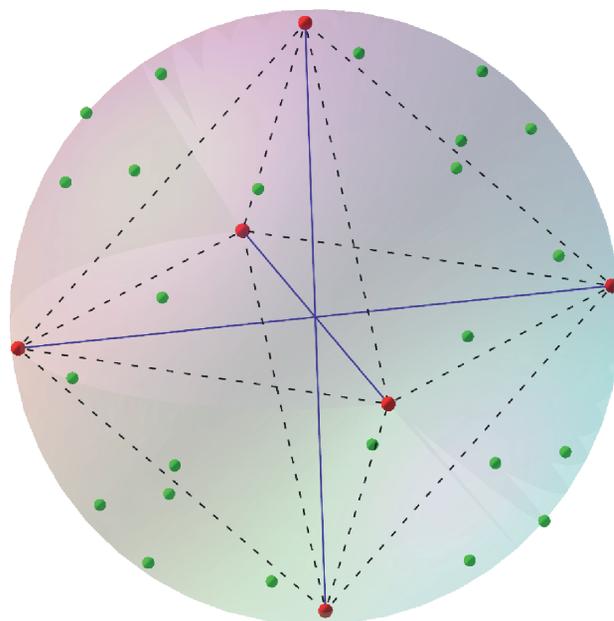


Рис. 2. Парные интерференции векторов рис. 1 с рациональными вероятностями квантовых переходов добавляют орбиту размера 24.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Порядок группы Клиффорда $|\text{CL}(3)| = 2592$. Центром $\text{CL}(3)$ является группа корней из единицы 12-й степени:

$$\mathbb{K}_{12} = \{1, \zeta, \dots, \zeta^{11}\}, \quad \text{где } \zeta = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

Порядок проективной группы Клиффорда $\text{PCL}(3) = \text{CL}(3)/\mathbb{K}_{12}$ равен 216.

Орбита онтологического вектора $|0\rangle$ имеет размер 12 и представляет собой объединение векторов полного множества взаимно несмещенных базисов в размерности три:

$$\text{Orb}_{\text{CL}(3)}|0\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \right. \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}; \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ \omega \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \omega \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ 1 \end{pmatrix}; \\ \left. \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \omega^2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

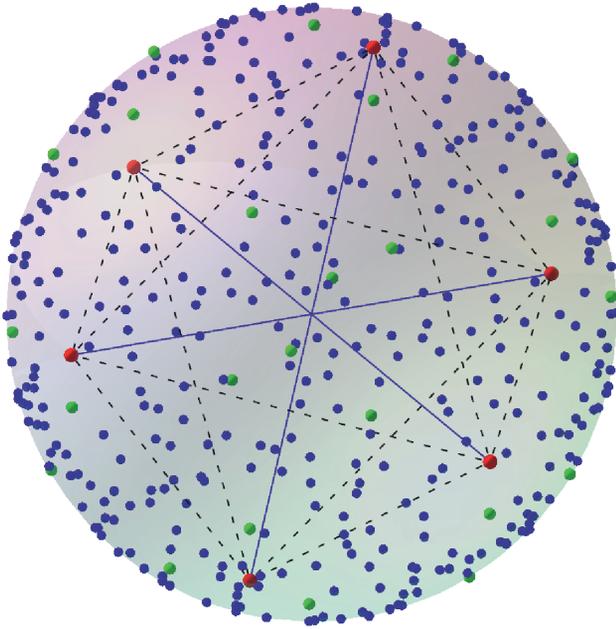


Рис. 3. Попарные интерференции векторов рис. 2 добавляют к множеству конструктивных квантовых состояний 16 орбит размера 24.

Здесь векторы орбиты последовательно сгруппированы в тройки, составляющие взаимно несмещенные базисы.

Интерференции вида $|\psi_1\rangle + \varphi |\psi_2\rangle$, где $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \text{Orb}_{\text{CL}(3)}|0\rangle$, а фазовые множители принадлежат центру группы Клиффорда, т.е. $\varphi \in \text{K}_{12}$, порождают 153 вектора с рациональными вероятностями переходов между собой и с элементами $\text{Orb}_{\text{CL}(3)}$. Эти 153 вектора представляют собой объединение 3-х орбит группы Клиффорда размеров $9 = 3^2$, $36 = 2^2 3^2$ и $108 = 2^2 3^3$.

Чтобы детальнее описать условия, при которых интерференции соответствуют требованиям рациональности вероятностей квантовых переходов, мы выделим из орбиты $\text{Orb}_{\text{CL}(3)}|0\rangle$ подмножество “онтических” элементов

$$\text{Ont} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

а из центра K_{12} подгруппу

$$\text{K}_6 = \{1, \xi^2, \xi^{2^2}, \dots, \xi^{2^5}\}.$$

Введем обозначения для дополнений к этим подмножествам:

$$\overline{\text{Ont}} = \text{Orb}_{\text{CL}(3)}|0\rangle \setminus \text{Ont} \text{ и } \overline{\text{K}_6} = \text{K}_{12} \setminus \text{K}_6.$$

Тогда условие рациональности вероятностей для интерференции $|\psi_1\rangle + \varphi |\psi_2\rangle$ сводится к следующим комбинациям:

$$\begin{aligned} \varphi \in \text{K}_6 \wedge (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \text{Ont} \vee |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \overline{\text{Ont}}), \\ \varphi \in \overline{\text{K}_6} \wedge (|\psi_1\rangle \in \text{Ont} \wedge |\psi_2\rangle \in \overline{\text{Ont}} \vee \\ \vee |\psi_1\rangle \in \overline{\text{Ont}} \wedge |\psi_2\rangle \in \text{Ont}). \end{aligned}$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исторически сложившиеся физические теории обычно включают неконструктивные элементы, такие как континуальные числовые поля, группы Ли, бесконечномерные гильбертовы пространства и другие подобные концепции. Удаление этих неконструктивных элементов из описания физической реальности позволяет сосредоточиться на содержательных аспектах рассматриваемых проблем. Применяя математические аргументы общего характера, мы продемонстрировали, что квантовое поведение эффективно воспроизводится с использованием конечных конструкций.

Мы показали, что эволюцию замкнутой квантовой системы можно описать циклической группой перестановок, а не непрерывной однопараметрической унитарной группой, используемой в стандартной квантовой теории. Более того, описание квантовой эволюции циклическими перестановками фактически следует из анализа Вейля применимости канонического коммутационного соотношения в конечномерных гильбертовых пространствах.

Развитие идей Вейля привело к открытию конечных структур, ассоциированных с конечномерным гильбертовым пространством, которые однозначно определяются размерностью этого пространства. Среди этих структур основными являются конечная группа Вейля–Гейзенберга и ее расширение – группа Клиффорда. Тем не менее представление об общей непрерывной унитарной группе как фундаментальной группе, которая описывает как квантовые эволюции, так и симметрии квантовых систем, остается неизменным.

Согласно нашему подходу мы отказываемся от этого представления и исключаем общую унитарную группу, которая ввиду своей неконструктивности является потенциальным источником артефактов. В нашем подходе квантовые эволюции описываются циклическими подгруппами группы Вейля–Гейзенберга, а группой симметрий квантовых систем является группа Клиффорда.

Ограничение использования произвольных элементов континуально-бесконечной уни-

тарной группы имеет эмпирически значимые последствия. В частности, отсутствие наблюдений квантовой запутанности и интерференций между элементарными частицами различных типов находит естественное объяснение.

Разложение квантовой системы на подсистемы определяется разложением размерности гильбертова пространства этой системы $N = \dim \mathcal{H}$ в произведение целых чисел. Существуют три принципиально разных случая размерности системы:

1. **Произведение взаимно простых чисел:** $N = n_1 n_2 \cdots n_K$, $\gcd(n_i, n_j) = 1$.

Гильбертово пространство системы разлагается в тензорное произведение пространств подсистем.

В рамках подхода, основанного на конечных группах и исключающего непрерывную унитарную группу, между подсистемами отсутствуют квантовые корреляции.

Более того, из китайской теоремы об остатках следует, что энергии взаимодействий между подсистемами также отсутствуют — энергия системы равна сумме энергий подсистем.

Следовательно, квантовое поведение можно изучать в подсистемах отдельно и независимо друг от друга.

Таким образом, композитные квантовые системы, состоящие из подсистем различных размерностей, не представляют особого интереса для отдельного изучения.

2. **Нетривиальная степень простого числа:** $N = p^\ell$, $\ell > 1$.

Гильбертово пространство системы также может быть разложено в тензорное произведение пространств подсистем, однако в данном случае они идентичны.

Именно в таких размерностях квантовое поведение проявляется во всей полноте, поэтому этот случай является основным для изучения.

3. **Простое число:** $N = p$.

В данном случае разложение квантовой системы на подсистемы, а следовательно, и возникновение квантовой запутанности, невозможно.

Конструктивный подход предполагает также модификацию понятия квантового состояния.

Проективное гильбертово пространство квантовых состояний в стандартной квантовой теории представляет собой непрерывное многообразие. Мы считаем, что его следует заменить некоторой конструктивной комбинаторной структурой, т. е. конечной или счетно-бесконечной.

Мы полагаем, что эта структура должна удовлетворять следующим требованиям:

- онтологические векторы $|0\rangle, \dots$ должны быть элементами структуры;
- структура должна быть инвариантной относительно группы Клиффорда, т. е. представлять собой объединение орбит этой группы;
- борновские вероятности переходов между элементами структуры должны быть рациональными числами в соответствии с естественной в конструктивном контексте частотной концепцией вероятности;
- фазовые множители в элементах структуры должны принадлежать центру группы Клиффорда.

Для проверки согласованности этих требований мы провели предварительные компьютерные вычисления с помощью системы компьютерной алгебры Maple. Некоторые результаты этих компьютерных экспериментов приведены в статье. Однако ввиду высокой комбинаторной сложности рассматриваемых задач мы предполагаем разработку более эффективных программ с использованием языка Си.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kornyak V.V.* Quantum models based on finite groups. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series **965**, 012023, 2018. arXiv:1803.00408 [physics.gen-ph]
2. *Kornyak V.V.* Modeling Quantum Behavior in the Framework of Permutation Groups. EPJ Web of Conferences **173**, 01007, 2018. arXiv:1709.01831 [quant-ph]
3. *Banks T.* Finite Deformations of Quantum Mechanics. arXiv:2001.07662 [hep-th], 20 p., 2020.
4. *'t Hooft G.* The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics. *Fundamental Theories of Physics 185*. 296 p. Springer, 2016.
5. *Morris S.A.* Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups. *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 1977.
6. *Weyl H.* The Theory of Groups and Quantum Mechanics. 448 p., NY, Dover Publications, 1931.
7. *Schwinger J.* Unitary Operator Bases. *Proc Natl Acad Sci USA*, **46**, No. 4, pp. 570–579, 1960.

8. *Bengtsson I. and Zyczkowski K.* Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement. Cambridge University Press, 2006.
9. *Waldron S.F.D.* An Introduction to Finite Tight Frames. *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhauser/Springer, New York, 2018.
10. *Vourdas A.* Finite and Profinite Quantum Systems. *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Springer, Berlin, 2017.
11. *Mullen G.L. and Panario D.* Handbook of Finite Fields. *Discrete Mathematics and Its Applications*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 1033 p., 2013.

CONSTRUCTIVE QUANTUM MECHANICS AND CALCULATIONS WITH FINITE GROUPS

V. V. Kornyak^a

*^aJoint Institute for Nuclear Research
Dubna, Moscow oblast, 141980 Russia*

Application of computer algebra and computational group theory to the study of problems arising in constructive quantum mechanics is considered.

Keywords: constructive quantum mechanics, calculations with finite groups