

# СПОСОБ ПРОВЕРКИ РЕГУЛЯРНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2025 г. Д. О. Илюхин<sup>а</sup>, А. В. Парусникова<sup>б,\*</sup>

<sup>а</sup> ГБОУ “Бауманская инженерная школа № 1580”

117639 Москва, Балаклавский проспект, д. 6А, Россия

<sup>б</sup> Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”

123458 Москва, Таллинская ул., д. 34, Россия

\*E-mail: aparusnikova@hse.ru

Поступила в редакцию 30.07.2024 г.

После доработки 31.08.2024 г.

Принята к публикации 22.09.2024 г.

В данной работе предлагается программа, написанная в пакете символьных вычислений, позволяющая проверить, является ли регулярной особой точкой линейной мероморфной системы произвольного порядка. Она основана на ранее известном способе приведения такой системы к линейному дифференциальному уравнению с мероморфными коэффициентами с помощью линейной замены.

*Ключевые слова:* регулярная особая точка, линейная система

DOI: 10.31857/S0132347425010015, EDN: DXVBZG

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе явно выписан критерий регулярности особой точки ноль системы линейных дифференциальных уравнений с мероморфной матрицей, а также приведен код в пакете символьных вычислений, позволяющий проводить проверку регулярности особой точки для таких систем.

## 2. ОСОБЫЕ ТОЧКИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим неавтономную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad (2.1)$$

где  $A(t)$  — это матрица коэффициентов  $a_{ij}(t)$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ; функции  $a_{ij}(t)$  мероморфны; линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = 0, \quad y \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

где  $a_i(t)$  — мероморфные функции.

Приведем необходимые определения [1].

**Определение 1.** Точка  $\tau$ , в которой матрица  $A(t)$  системы (2.1) имеет полюс, называется особой точкой системы (2.1).

**Определение 2.** Точка  $\tau$ , в которой хотя бы один из коэффициентов  $a_i(t)$  линейного уравнения (2.2) имеет полюс, называется особой точкой уравнения (2.2).

Все случаи легко сводятся к  $\tau = 0$  заменой. Далее предполагаем, что особая точка  $\tau = 0$ .

**Определение 3.** Особая точка  $t = 0$  системы (2.1) (или уравнения (2.2)) называется регулярной, если все решения  $\varphi(t)$  системы (уравнения) имеют не более чем степенной рост в любом секторе с вершиной в точке  $t = 0$ . Это означает следующее: для любого решения  $\varphi$  в секторе  $a < \arg t < b$  верно, что

$$\exists C_N, r > 0, N \in \mathbb{N} : |\varphi(t)| < C_N/|t|^N,$$

$$\forall t : 0 < |t| < r, \quad a < \arg t < b.$$

В остальных случаях особая точка называется иррегулярной.

**Определение 4.** Говорят, что система (2.1) имеет фуксову особую точку в  $t = 0$ , если  $A(t)$  имеет простой полюс в  $t = 0$ .

**Определение 5.** Особая точка  $t = 0$  уравнения (2.2) фуксова, если все функции  $t^j a_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , являются аналитическими в точке  $t = 0$ .

Способ проверки регулярности особой точки системы основан на следующей теореме, которая может быть найдена в [1].

**Теорема 1.** *Особая точка  $t = 0$  уравнения (2.2) регулярна тогда и только тогда, когда является фуксовою.*

Имеется критерий регулярности для линейной системы дифференциальных уравнений с матрицей  $A$  специального вида. Также существуют алгоритмы [2, 3], позволяющие проверить, является ли особая точка системы регулярной с помощью преобразования матрицы системы. Есть работы, в которых предложены способы сведения линейных систем к специальному виду [4].

Легко видеть, что уравнение (2.2) легко приводится к системе (2.1) с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & -a_1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

с помощью стандартной замены  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ , ...,  $x_n = y^{(n-1)}$ .

В данной работе мы записываем еще один критерий регулярности особой точки системы. Он основан на результате, опубликованном, например, в [5]: система (2.1) может быть приведена к уравнению (2.2).

Предварительная версия этой работы опубликована в [6].

### 3. КРИТЕРИЙ РЕГУЛЯРНОСТИ

Перейдем к построению линейного преобразования, приводящего систему к уравнению.

Используем то, что при линейной замене система приводится к следующему виду (см. [2], [7]).

**Лемма 1.** *Линейная замена*

$$\tilde{x} = H(t)x$$

переводит систему (2.1) в линейную систему с матрицей

$$\tilde{A} = HAH^{-1} + \dot{H}H^{-1}. \quad (3.1)$$

Обозначим через  $h_{ij}$ ,  $(h^{-1})_{ij}$ ,  $\dot{h}_{ij}$  элементы матриц  $H$ ,  $H^{-1}$ ,  $\dot{H}$  соответственно, а через  $H_{ij}$  — миноры матрицы  $H$ .

Применим лемму, доказательство которой есть в [5].

**Лемма 2.** *Существует линейное преобразование  $\tilde{x} = H(t)x$ , переводящее линейную систему (2.1) в систему с матрицей коэффициентов (2.3).*

Это преобразование строится следующим образом [5]: возьмем  $t_0$  — неособую точку системы (2.1), рассмотрим вектор-функцию вида

$$q_0(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t - t_0) + \dots + \alpha_n(t - t_0)^{n-1}, \quad (3.2)$$

являющуюся векторным многочленом степени  $n - 1$  с векторными коэффициентами  $\alpha_j \in \mathbb{C}^n$ .

Вектор-функции  $q_j$  задаются формулами вида

$$q_{j+1}(t) = \dot{q}_j(t) + q_j(t)A(t). \quad (3.3)$$

По строкам матрицы  $H(t)$  записаны вектор-функции  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ . Коэффициенты  $\alpha_j$  могут быть выбраны так, чтобы матрица  $H(t)$  была невырожденной.

Мы вновь иллюстрируем, что эти преобразования приводят систему (2.1) к системе с матрицей вида (2.3). Применяем линейное преобразование (3.2), (3.3) к системе (2.1) и согласно лемме 1 получаем новую линейную систему с матрицей  $\tilde{A}$  (3.1).

Элементы  $\tilde{a}_{1j}$  первой строки матрицы  $\tilde{A}$  вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{1j} &= \frac{1}{\det H} \left( \dot{h}_{11}H_{j1} + \dots + \dot{h}_{1n}H_{jn} + \right. \\ &+ H_{j1} \sum_{k=1}^n h_{1k}a_{k1} + \dots + H_{jn} \sum_{k=1}^n h_{1k}a_{kn} \left. \right) = \\ &= \frac{1}{\det H} \left( H_{j1} \left( \dot{h}_{11} + \sum_{k=1}^n h_{1k}a_{k1} \right) + \dots \right. \\ &\left. \dots + H_{jn} \left( \dot{h}_{1n} + \sum_{k=1}^n h_{1k}a_{kn} \right) \right) = \begin{cases} 1, & j = 2 \\ 0, & j \neq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Заметим, что выражения  $\dot{h}_{1l} + \sum_{k=1}^n h_{1k}a_{k1} = h_{2l}$ , где  $l = 1, \dots, n$ , т. е. это элементы второй строки матрицы  $H$ , поскольку строки  $H$  получаются с помощью преобразования (3.3), и вся сумма в скобках при  $j = 2$  равна определителю матрицы  $H$ , разложенному по второй строке, и равна фальшивому разложению определителя при  $j \neq 2$ .

Итак, мы получаем, что первая строка матрицы  $\tilde{A}$  — это  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ .

Повторяя эту процедуру для следующих  $(n - 2)$ -х строк, получаем матрицу размера  $(n - 1) \times n$  вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Элементы  $n$ -й строки матрицы  $\tilde{A}$  имеют вид

$$\tilde{a}_{nj} = \frac{1}{\det H} \sum_{s=1}^n \left( H_{js} \left( \dot{h}_{ns} + \sum_{k=1}^n h_{nk} a_{ks} \right) \right).$$

Таким образом, получена новая система линейных дифференциальных уравнений с матрицей (2.3).

**Утверждение 1.** Особая точка  $t = 0$  линейной системы дифференциальных уравнений (2.1) регулярна тогда и только тогда, когда  $f_j = t^j a_j(t) \forall j = 1, 2, \dots, n$ , являются аналитическими в нуле, где

$$a_j = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{r=1}^n h_{nr} a_{rk} \right) (h^{-1})_{kj} + \sum_{r=1}^n \dot{h}_{nr} (h^{-1})_{rj}.$$

Строки матрицы  $H(t)$  — это вектор-функции  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ , которые определяются по формулам (3.2), (3.3). Коэффициенты  $a_j$  могут быть выбраны так, что матрица  $H(t)$  невырождена.

**Доказательство.** Непосредственно вытекает из леммы 2 и теоремы 1.

Приведем явные формулы для проверки критерия для случая  $n = 2$ , предполагая, что  $q_0 = (1, 0)$  или  $q_0 = (0, 1)$ , и выпишем значения  $a_1$  и  $a_2$  в частном случае при  $n = 3$ , взяв  $q_0 = (1, 0, 0)$ , а остальные  $q_j(t) = 0$ .

**Утверждение 2.** Особая точка  $t = 0$  системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка (2.1) регулярна тогда и только тогда, когда функции  $f_j = t^j a_j(t)$ ,  $j = 1, 2$ , аналитические в нуле.

Если  $a_{12} \equiv 0$ , функции  $a_j$  определяются как

$$a_1 = -a_{11} - a_{22} - \frac{\dot{a}_{21}}{a_{21}};$$

$$a_2 = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} + \frac{a_{22}\dot{a}_{21}}{a_{21}} - a_{22}.$$

Если  $a_{12} \neq 0$ , то

$$a_1 = -a_{11} - a_{22} - \frac{\dot{a}_{12}}{a_{12}};$$

$$a_2 = -a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} + \frac{a_{11}\dot{a}_{12}}{a_{12}} - a_{11}.$$

**Замечание 1.** Особая точка  $t = 0$  системы линейных дифференциальных уравнений третьего порядка (2.1) регулярна тогда и только тогда, когда функции  $f_j = t^j a_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , аналитические в нуле. При  $\det H(t) \neq 0$ , где

$$\det H = a_{12}\dot{a}_{13} + a_{12}^2 a_{23} + a_{12}a_{13}a_{33} - a_{13}\dot{a}_{12} -$$

$$-a_{13}a_{12}a_{22} - a_{32}a_{13}^2 a_{12},$$

выражения  $a_1, a_2$  определяются формулами

$$-a_1(t) \det H(t) = -a_{32}a_{11}a_{13}^2 + \dot{a}_{13}a_{11}a_{12} -$$

$$\begin{aligned} & -a_{13}a_{22}a_{11}a_{12} + a_{12}a_{33}a_{11}a_{13} + a_{12}^2 a_{23}a_{11} + \\ & + \dot{a}_{13}a_{12} - 2\dot{a}_{12}a_{22}a_{13} - a_{13}^2 \dot{a}_{32} + a_{12}^2 \dot{a}_{23} - a_{22}a_{13}^2 a_{32} - \\ & - 2\dot{a}_{13}a_{32}a_{13} - \dot{a}_{12}a_{13} - a_{13}a_{11}\dot{a}_{12} - a_{32}a_{13}^2 a_{33} + \\ & + a_{22}a_{12}^2 a_{23} + 2\dot{a}_{12}a_{23}a_{12} + 2\dot{a}_{13}a_{33}a_{12} + a_{33}a_{12}^2 a_{23} + \\ & + a_{13}a_{33}^2 a_{12} - a_{12}\dot{a}_{22}a_{13} - a_{12}a_{22}^2 a_{13} + a_{13}\dot{a}_{33}a_{12}; \end{aligned}$$

$$a_2(t) \det H(t) = \dot{a}_{13}(a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} + a_{11}a_{12} + \dot{a}_{12}) +$$

$$\begin{aligned} & + 2a_{13}\dot{a}_{11}\dot{a}_{12} + 2a_{13}^2 \dot{a}_{11}a_{32} + a_{13}^2 a_{31}\dot{a}_{12} - \\ & - \dot{a}_{12}(a_{13}a_{33} + a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + \dot{a}_{13}) + a_{12}^2 \dot{a}_{23}a_{11} - \\ & - a_{12}a_{22}^2 \dot{a}_{13} + a_{12}^2 \dot{a}_{23}a_{22} + a_{13}^3 a_{31}a_{32} + 2\dot{a}_{13}a_{33}\dot{a}_{12} + \\ & + a_{33}a_{12}^2 a_{23}a_{22} + 2a_{13}\dot{a}_{11}a_{12}a_{22} - a_{22}a_{13}a_{32}\dot{a}_{13} - \\ & - a_{13}\dot{a}_{32}\dot{a}_{13} + a_{13}a_{33}^2 \dot{a}_{12} - 2\dot{a}_{13}^2 a_{32} - a_{12}^2 a_{21}a_{13}a_{33} - \\ & - a_{12}\dot{a}_{22}a_{11}a_{13} - a_{12}\dot{a}_{22}\dot{a}_{13} - 2\dot{a}_{12}a_{22}\dot{a}_{13} + a_{12}\dot{a}_{23}a_{13}a_{32} - \\ & - a_{12}a_{22}^2 a_{13}a_{33} + a_{13}a_{33}^2 a_{12}a_{22} - a_{13}\dot{a}_{32}a_{12}a_{23} - a_{12}^3 a_{21}a_{23} - \\ & - a_{32}a_{11}a_{13}^2 a_{33} - 3\dot{a}_{13}a_{32}a_{12}a_{23} + a_{33}a_{12}a_{23}\dot{a}_{12} + \\ & + a_{13}^2 a_{12}a_{21}a_{32} + 3\dot{a}_{12}a_{23}a_{13}a_{32} - 2a_{12}\dot{a}_{11}a_{13}a_{33} - \\ & - 2a_{12}\dot{a}_{11}\dot{a}_{13} - a_{12}\dot{a}_{22}a_{13}a_{33} + a_{13}a_{33}^2 a_{11}a_{12} + \\ & + 2\dot{a}_{13}a_{33}a_{11}a_{12} + 2\dot{a}_{13}a_{33}a_{12}a_{22} + a_{13}^2 a_{31}a_{12}a_{22} + \\ & + 2\dot{a}_{12}a_{23}a_{11}a_{12} - a_{12}a_{13}a_{31}\dot{a}_{13} + 2\dot{a}_{12}^2 a_{23} - \\ & - a_{13}^2 \dot{a}_{32}a_{11} - a_{32}a_{12}a_{23}a_{13}a_{33} + a_{23}a_{13}^2 a_{32}^2 + \\ & + a_{12}\dot{a}_{23}\dot{a}_{12} + a_{13}^2 \dot{a}_{33}a_{32} + a_{13}\dot{a}_{33}\dot{a}_{12} + a_{13}a_{12}^2 a_{21}a_{22} + \\ & + a_{13}a_{12}a_{21}\dot{a}_{12} - a_{22}a_{13}^2 a_{32}a_{11} - a_{13}^2 \dot{a}_{32}a_{33} - \\ & - a_{12}^2 a_{13}a_{31}a_{23} - a_{32}a_{12}^2 a_{23}^2 + \dot{a}_{12}a_{22}a_{12}a_{23} - \\ & - 2\dot{a}_{12}a_{22}a_{13}a_{33} + a_{22}a_{11}a_{12}^2 a_{23} - a_{12}a_{22}^2 a_{11}a_{13} + \\ & + a_{13}\dot{a}_{33}a_{11}a_{12} + a_{33}a_{12}^2 a_{23}a_{11} - a_{12}^2 \dot{a}_{22}a_{23} - 2a_{12}^2 \dot{a}_{11}a_{23} - \\ & - a_{22}a_{13}^2 a_{32}a_{33} - 2\dot{a}_{13}a_{32}a_{11}a_{13} - a_{12}a_{13}^2 a_{31}a_{33} - \\ & - 2\dot{a}_{12}a_{22}a_{11}a_{13} - \dot{a}_{13}a_{32}a_{13}a_{33} + a_{22}a_{13}a_{32}a_{12}a_{23} + \\ & + a_{13}\dot{a}_{33}a_{12}a_{22} - a_{12}^2 a_{21}\dot{a}_{13}. \end{aligned}$$

Мы не выписываем функцию  $a_3$ , она может быть получена из утверждения 1.

**Замечание 2.** Явные формулы для  $n > 3$  здесь не приводятся, проверку регулярности можно провести в пакете символьных вычислений, а сами формулы довольно громоздки уже при  $n = 3$ .

Итак, наиболее удобно использовать системы компьютерной алгебры для проверки критерия, выписанного выше. Имеется написанный в пакете символьных вычислений Wolfram Mathematica [8] код для определения регулярности особой точки ноль линейной системы дифференциальных уравнений произвольного порядка, который приведен в Листинге 1. На входе задается порядок линейной системы с мероморфной в нуле матрицей и сама матрица; на выходе либо сообщение о том, что определитель матрицы  $H$  тождественный ноль, либо утверждение о регулярности (True) или иррегулярности (False) особой точ-

ки, если заложенное преобразование  $H$  невырождено.

#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

**Пример 1.** Рассмотрим третье уравнение Пенлеве ( $P_{III}$ ):

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{1}{z}(\alpha w^2 + \beta) + \gamma w^3 + \frac{\delta}{w},$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  – произвольные комплексные параметры;  $z$  и  $w$  – независимая и зависимая переменные соответственно.

Уравнение  $P_{III}$  при значениях параметров  $\alpha = 1, \gamma = 0, \delta = -1$  эквивалентно [9] нелинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$\begin{cases} zw' = z + (1 - \beta)w + zw^2v, \\ zv' = 1 - (2 - \beta)v - zwv^2, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $w$  – решение уравнения  $P_{III}$ .

Повторяя написанное в [10], выпишем одно из формальных решений данной системы (4.1) при  $z \rightarrow \infty$  – вектор из формальных рядов Пуизо:

$$\begin{cases} w_f = z^{\frac{1}{3}} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-\frac{2n}{3}} \right), \\ v_f = z^{-\frac{2}{3}} \left( -1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^{-\frac{2n}{3}} \right). \end{cases}$$

Сначала приведем систему (4.1) к стандартному виду  $z^{-p}y' = f(z, y)$  с помощью преобразования

$$t = z^{-\frac{1}{3}}, v_f(x) = \frac{1}{t}(y_1(t) + 1), w_f(x) = t^2(y_2(t) - 1).$$

Тогда  $y = (y_1, y_2)^T$  удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} -t^3 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} 3 + (2 - 3\beta)t^2(y_1 + 1) + 3(y_1 + 1)^2(y_2 - 1) \\ 3 + (3\beta - 4)t^2(y_2 - 1) - 3(y_1 + 1)(y_2 - 1)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

старшее слагаемое разложения в ряд Лорана по  $t$  вблизи нуля матрицы линеаризации правой части которой на указанном выше решении имеет вид

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Итак, после линеаризации имеем следующую систему с мероморфной в нуле матрицей:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{t^3} & \frac{-3}{t^3} \\ \frac{3}{t^3} & \frac{-6}{t^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

```
n = ...; (*вводим размер матрицы*)
A =
Table[a[i][j][t], {i, 1, n}, {j, 1,
n}]; (*матрица A в общем виде*)
For[i = 0, i < n,
i++, {Alpha[i] = {Table[\[Alpha][i][j],
{j, 1, n}]}]}];
q[0] = Sum[Alpha[i]*(t - t0)^i, {i, 0,
n - 1}];
For[i = 0,
i < n - 1, i++, {q[i + 1] = D[q[i], t]
+ q[i] . A}]}
H =
Table[q[i][[1]][[j]], {i, 0, n - 1},
{j, 1,
n}];
For[i = 0, i < n, i++,
For[j = 1, j <= n, j++, \[Alpha][i][j]
= 0]];
\[Alpha][0][1] = 1;
If[PossibleZeroQ[Det[H]] != False],
"Определитель_матрицы_H_
тождественный_ноль",
DiffH = D[H, t];
InvH = Inverse[H];
f[k_, n_] :=
Sum[(Sum[H[[n]][[j]]*A[[j]][[r]], {j,
1, n}])*InvH[[r]][[k]], {r, 1,
n}] +
Sum[DiffH[[n]][[r]]*InvH[[r]][[k]],
{r, 1, n}];
F[i_] := FunctionAnalytic[Simplify[f[i,
n]*t^i], t, Complexes];
ForAll[{For[i = 1, i <= n, i++, F[i]}],
True]]
```

**Листинг 1.** Регулярность особой точки системы  $n$ -го порядка

Применяя преобразование  $H$  к матрице  $A(t)$ , получаем, что  $f_1 = ta_1(t) = 3$  — аналитическая в нуле, но  $f_2 = t^2a_2 = -\frac{27}{t^4} + \frac{18}{t^2} + \frac{6}{t}$  в нуле имеет полюс, поэтому  $t = 0$  является иррегулярной точкой старшего слагаемого ряда Лорана линеаризации преобразованной системы (4.1) на ее частном решении.

Заметим, что в работе [11] доказано, что при  $\alpha\beta \neq 0, \delta = -\beta^2/2$ , т. е. при  $\beta^2 = 2$ , учитывая уже наложенные в данном примере ограничения, ряд  $y_2$  является расходящимся.

**Пример 2.** Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 8t^2 & t \\ \frac{1}{t^2} & t^2 \end{pmatrix} z.$$

Здесь

$$a_{12} \neq 0, \quad a_1 = -9t^2 + \frac{2}{t}, \quad a_2 = -\frac{1}{t} + 8t^4 - 2t - t^2.$$

Функции  $f_1 = -9t^3 + 2, f_2 = 8t^6 - t^4 - 2t^3 + t$  — аналитические в нуле, следовательно, особая точка  $t = 0$  регулярная.

## 5. БЛАГОДАРНОСТИ

Статья подготовлена в ходе работы в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики” (НИУ ВШЭ).

Мы благодарим Р. Р. Гонцова.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Zoladek H.* The monodromy group // Instytut matematyczny PAN. Basel: Birkhauser Verlag (2006).
2. *Moser J.* The order of a singularity in Fuchs' theory // Math Z. 1959. V. 72. P. 379–398.
3. *Barkatou A.* A rational version of Moser's algorithm // Proceedings of the 1995 international symposium on Symbolic and algebraic computation. April. 1995. P. 297–302.
4. *Брюно А.Д.* Мероморфная проводимость линейной треугольной системы ОДУ // Доклады академии наук. 2000. Т. 371. № 5. С. 587–590.
5. *Вьюгин И.В., Гонцов Р.Р.* О дополнительных параметрах в обратных задачах монодромии // Матем. сборник. 2006. Т. 197. № 12. С. 43–64.
6. *Илюхин Д.О., Парусникова А.В.* Критерий регулярности линейных системы линейных дифференциальных уравнений малых порядков с мероморфными коэффициентами // Труды Приокской научной конференции ГСГУ Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики. 2019. С. 65–73.
7. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений // М.: Мир, 1968.
8. *Wolfram St.* The Mathematica Book. Wolfram Media, Inc., 2003. 1488 p.
9. *Gromak V.I., Laine I., and Shimomura S.* Painleve Differential Equations in the Complex Plane // De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 28, Berlin, 2002.
10. *Lin Y., Dai D., Tibboel P.* Existence and uniqueness of tronquee solutions of the third and fourth Painleve equations // Nonlinearity. 2014. Vol. 27. No. 2. P. 171–186.
11. *Parusnikova A.V., Vasilyev A.V.* On the exact Gevrey order of formal Puiseux series solutions to the third Painleve equation // Journal of Dynamical and Control Systems. 2019. Vol. 25. No. 4. P. 681–690.

# METHOD FOR CHECKING THE REGULARITY OF A SINGULAR POINT OF A SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MEROMORPHIC COEFFICIENTS

D. O. Ilyukhin<sup>a</sup>, A. V. Parusnikova<sup>a,b</sup>,

<sup>a</sup>State Budgetary Educational Institution "Bauman Engineering School" № 1580  
Balaklavskii pr. 6A, Moscow, 117639 Russia

<sup>b</sup>HSE University, ul. Tallinskaya 34, Moscow, 123458 Russia

This paper proposes a program written in a symbolic computing package that allows one to check whether a singular point of a linear meromorphic system of arbitrary order is regular. The program is based on the known method for reducing this system by linear substitution to a linear differential equation with meromorphic coefficients.

*Keywords:* regular singular point, linear system

## REFERENCES

1. Zoladek H. The Monodromy Group, Instytut Matematyczny PAN, Basel: Birkhauser Verlag, 2006.
2. Moser J. The order of a singularity in Fuchs' theory, *Math. Z.*, 1959, vol. 72, pp. 379–398.
3. Barkatou A. A rational version of Moser's algorithm, *Proc. Int. Symp. Symbolic and Algebraic Computation*, 1995, pp. 297–302.
4. Bruno A.D. Meromorphic conductivity of a linear triangular system of ODEs, *Dokl. Akad. Nauk*, 2000, vol. 371, no. 5, pp. 587–590.
5. Vyugin I.V., Gontsov R.R. Additional parameters in inverse problems of monodromy, *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 12, pp. 1753–1773
6. Ilyukhin D.O., Parusnikova A.V. Regularity criterion for linear systems of linear differential equations of small orders with meromorphic coefficients, *Tr. Priokskoi nauchnoi konferentsii Differentsial'nye uravneniya i smezhnye voprosy matematiki (Proc. Priokskaya Sci. Conf. Differential Equations and Related Topics in Mathematics)*, 2019, pp. 65–73.
7. Vazov V. Asimptoticheskie razlozheniya reshenii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii (Asymptotic Expansions of Solutions of Ordinary Differential Equations), Moscow: Mir, 1968.
8. Wolfram St. The Mathematica Book, Wolfram Media, 2003.
9. Gromak V.I., Laine I., Shimomura S. Painleve differential equations in the complex plane, *De Gruyter Stud. Math.*, 2002, vol. 28.
10. Lin Y., Dai D., Tibboel P. Existence and uniqueness of tronquée solutions of the third and fourth Painleve equations, *Nonlinearity*, 2014, vol. 27, no. 2, pp. 171–186.
11. Parusnikova A.V., Vasilyev A.V. On the exact Gevrey order of formal Puiseux series solutions to the third Painleve equation, *J. Dyn. Control Syst.*, 2019, vol. 25, no. 4, pp. 681–690.