

УДК 519.85

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ КРАТНЫХ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ МЕТОДАМИ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

© 2024 г. В. И. Кузоватов^{a, *}, А. А. Кытманов^{b, a, **}, Е. К. Мышкина^{a, ***}^aСибирский федеральный университет, 660041 Красноярск, пр. Свободный, 79, Россия
^bМИРЭА — Российский технологический университет, 119454 Москва, пр. Вернадского, 78, Россия

*E-mail: kuzovатов@yandex.ru

**E-mail: aakyt@gmail.com

***E-mail: elffenok@mail.ru

Поступила в редакцию 01.08.2023

После доработки 10.09.2023

Принята к публикации 01.10.2023

В работе предложен метод вычисления частичных сумм некоторых кратных числовых рядов, возникающих в процессе нахождения результата многочлена и целой функции. Степенные суммы корней, участвующие в данной формуле, возможно найти без нахождения самих корней системы с помощью символического алгоритма, использующего рекуррентные формулы Ньютона. Алгоритм, реализующий предложенный подход вычисления частичных сумм кратных числовых рядов, реализован в системе компьютерной алгебры Maple. Приведены примеры нахождения частичных сумм некоторых классов кратных числовых рядов с помощью созданного алгоритма.

Ключевые слова: кратные числовые ряды, степенные суммы корней, рекуррентные формулы Ньютона, методы компьютерной алгебры

DOI: 10.31857/S0132347424020094 EDN: ROLFAU

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование систем алгебраических уравнений является классической задачей. Частью ее является задача исключения неизвестных. Для двух переменных и систем из двух уравнений она решается с помощью результата Сильвестра. Для систем из большего числа уравнений хорошо известна классическая схема исключения неизвестных, но она, как правило, является весьма трудоемкой. В настоящее время общепринятым методом исключения неизвестных является метод базисов Гребнера, созданный в работах Бухбергера и его учеников.

Модифицированный метод исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений в \mathbb{C}^n возник в работе Л.А. Айзенберга [1]. Основная идея метода заключается в нахождении степенных сумм корней системы с помощью формулы многомерного логарифмического вычета, не вычисляя самих корней, а затем в использовании классических рекуррентных формул Ньютона для построения результата. В отличие от классического метода исключения он менее трудоемок и не увеличивает кратности корней. Дальнейшая его разработка продолжена в монографиях [2, 3, 4]. В качестве приложений этой теории были рассмотрены системы нелинейных уравнений, возникающие в химической кинетике и зависящие от параметров.

Во многих прикладных задачах [5] возникают также неалгебраические системы уравнений, состоящие из экспоненциальных многочленов, т.е. из функций конечного порядка роста. Для систем неалгебраических уравнений, множество корней которых, как правило, бесконечно, степенные суммы корней в положительной степени, вообще говоря, являются расходящимися рядами. Но степенные суммы корней в отрицательной степени часто являются сходящимися. Возникает задача об их вычислении через коэффициенты Тейлора функций, входящих в систему. Это вычисление можно осуществить с помощью вычетов интегралов. Тем самым возник метод нахождения сумм кратных числовых рядов, основанный на использовании вычетов интегралов, связанных с системой уравнений. В работах [6, 7, 8] на основе данного метода найдены суммы некоторых классов кратных числовых рядов, ранее отсутствовавших в известных справочниках.

Отметим, что метод вычисления сумм кратных числовых рядов, представленный в данной статье, существенно отличается от метода вычетов интегралов, рассмотренного в работах [6, 7, 8]. Наш подход основан на использовании формулы для результата многочлена (или целой функции с конечным числом нулей) и целой функции, полученной в работах [9, 10]. Данная формула не требует значения

корней исследуемых функций и представляет собой некоторое комбинаторное выражение. Вычисляя результат многочлена и целой функции двумя разными способами, удастся получить соотношение для кратных числовых рядов. В качестве второго способа нахождения результата выбирается формула для произведения одной функции в корнях другой. В данной статье мы приводим примеры вычисления сумм некоторых типов кратных числовых рядов, ранее отсутствовавших в известных справочниках. Они выражаются через известные специальные функции, такие как функция Бесселя. Однако, не всегда аналитически удастся выразить сумму кратного числового ряда через известные величины. Для некоторых кратных числовых рядов, суммы которых могут быть вычислены предложенным методом, другие методы их вычисления на данный момент неизвестны. Описанию предложенного метода и посвящена настоящая статья.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для данных многочленов f и g классический результат $R(f, g)$ может быть определен различными способами с использованием определителя Сильвестра, способа Безу–Кэли или формулы для произведения

$$R(f, g) = \prod_{\{x: f(x)=0\}} g(x).$$

Подробный обзор работ, относящихся к классическому результату и его обобщениям, можно найти в [10].

Напомним классические рекуррентные формулы Ньютона для многочленов. Они связывают между собой коэффициенты многочлена и степенные суммы его корней.

Пусть

$$P(z) = z^m + c_1 z^{m-1} + \dots + c_{m-1} z + c_m.$$

Обозначим через z_1, z_2, \dots, z_m его корни (среди них могут быть и кратные). Определим степенную сумму корней

$$S_k = z_1^k + \dots + z_m^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad S_0 = m.$$

Степенные суммы S_k и коэффициенты c_j связаны между собой классическими рекуррентными формулами Ньютона:

$$\begin{cases} S_j + \sum_{i=1}^{j-1} S_{j-i} c_i + j c_j = 0, & 1 \leq j \leq m, \\ S_j + \sum_{i=1}^m S_{j-i} c_i = 0, & j > m. \end{cases}$$

В работах [11, 12] предложены метод и символьный алгоритм вычисления многомерных рекуррентных формул Ньютона.

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из двух многочленов $f(z)$ и $g(z)$ степеней m и n соответственно:

$$\begin{cases} f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m, \\ g(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n. \end{cases} \quad (1)$$

Теорема 1 ([9]). *Результант $R(f, g)$ системы многочленов вида (1), где $m=2$, вычисляется по формуле*

$$R(f, g) = \sum_{k=0}^n b_k^2 a_0^k + \sum_{t=0}^{n-1} \sum_{s=t+1}^n b_t b_s a_0^t S_{s-t}, \quad (2)$$

где степенные суммы S_j корней многочлена $f(z)$ определяются рекуррентными формулами Ньютона.

Теорема 2 ([10]). *Результант $R(f, g)$ системы многочленов вида (1), где $m=3$, вычисляется по формуле*

$$\begin{aligned} R(f, g) = & \sum_{k=0}^n b_k^3 (-a_0)^k + \sum_{s=0}^n \sum_{t=s+1}^n (-a_0)^s \times \\ & \times \left(\frac{1}{2} b_s b_t^2 (S_{t-s}^2 - S_{2t-2s}) + b_s^2 b_t S_{t-s} \right) + \\ & + \sum_{s=0}^n \sum_{t=s+1}^n \sum_{p=t+1}^n b_s b_t b_p (-a_0)^s \\ & \times [S_{t-s} \cdot S_{p-s} - S_{t+p-2s}]. \end{aligned} \quad (3)$$

Осуществив в (2) (соответственно, в (3)) предельный переход по n , получаем утверждение о результате относительно многочлена (или целой функции с конечным числом нулей) и целой функции.

Теорема 3 ([9, 10]). *Пусть $g(z)$ — целая функция на комплексной плоскости \mathbb{C} вида*

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots,$$

а $f(z)$ — многочлен вида (1) при $m=2$ (или соответственно при $m=3$). Тогда результатом $R(f, g)$ является выражение (2) (соответственно выражение (3)), в котором необходимо выполнить предельный переход по n .

Здесь следует отметить, что ряды, получающиеся при предельном переходе по n в правых частях формул (2) и (3), абсолютно сходятся ввиду того, что b_k — это коэффициенты разложения целой функции.

Замечание 1. *Отметим, что такие задачи, как вычисление результата двух многочленов или вычисление степенных сумм системы уравнений, тесно связаны с теорией симметрических функций. Современные системы компьютерной алгебры общего назначения,*

такие как *Maplesoft Maple*, *Wolfram Mathematica* и свободно распространяемая система *SageMath*, содержат пакеты, позволяющие эффективно проводить вычисления с симметрическими многочленами и на основе этого решать такие задачи, как вычисления результата. Тем не менее ценность результатов, приведенных в теоремах и в том, что там предлагаются явные выражения для вычисления результата через коэффициенты многочленов и их степенные суммы.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Целью данной работы является программная реализация формул (2) и (3). При определенном выборе многочлена $f(z)$ и целой функции $g(z)$ в формуле для результата в теореме 3 мы получаем кратные числовые ряды. Задача о нахождении частичных сумм данных кратных числовых рядов есть предмет нашего исследования. Таким образом, задача о вычислении кратных числовых рядов, не возникающих при вычислении результата в теореме 3, остается открытой задачей. Отметим, что имеется большое число способов вычисления результата двух многочленов в различных системах компьютерной алгебры [13]. Наш подход к построению результата позволяет находить частичные суммы рассматриваемых рядов, что является особенно важным в случае, когда корни функций не известны.

Алгоритм вычисления частичных сумм кратных числовых рядов был реализован в среде Maple 2016 64bit. Полный код программы, реализующий формулы (2) и (3), доступен по адресам <https://github.com/aakytmanov/Resultant2n>, <https://github.com/aakytmanov/Resultant34n>. Вычисления производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 10 Pro x64 22H2. Время счета для приведенных ниже примеров составило менее 1 секунды.

Пример 1. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f(z) = (z - a)(z - b) = z^2 - z(a + b) + ab, \\ g(z) = \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{cases}$$

Поскольку в данной задаче в разложении целой функции $g(z)$ присутствуют лишь коэффициенты при нечетных степенях, то формула для результата из теоремы 3 примет вид:

$$R(f, g) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}^2 a_0^{2k+1} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=t+1}^{\infty} b_{2t+1} b_{2s+1} a_0^{2t+1} S_{2s+1-(2t+1)}.$$

Используя данное соотношение и определение результата в виде формулы для произведения, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2k+1)!} \right)^2 (ab)^{2k+1} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{1}{(2t+1)!} \frac{1}{(2s+1)!} (ab)^{2t+1} S_{2s-2t} = \operatorname{sha} \operatorname{sh} b.$$

Здесь

$$S_{2s-2t} = z_1^{2s-2t} + z_2^{2s-2t} = a^{2s-2t} + b^{2s-2t},$$

$$(ab)^{2t+1} S_{2s-2t} = a^{2s+1} b^{2t+1} + a^{2t+1} b^{2s+1}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ab)^{2k+1}}{[(2k+1)!]^2} + \sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{a^{2s+1} b^{2t+1} + a^{2t+1} b^{2s+1}}{(2t+1)!(2s+1)!} = \operatorname{sha} \operatorname{sh} b. \quad (4)$$

Известно [14, формула 5.2.10.5], что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ab)^{2k+1}}{[(2k+1)!]^2} = \frac{1}{2} [I_0(2\sqrt{ab}) - J_0(2\sqrt{ab})],$$

где $J_0(2\sqrt{ab})$ — функция Бесселя 1-го рода и $I_0(2\sqrt{ab})$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода (функция Бесселя мнимого аргумента). Следовательно, мы можем выразить сумму кратного числового ряда следующим образом:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \sum_{s=t+1}^{\infty} \frac{a^{2s+1} b^{2t+1} + a^{2t+1} b^{2s+1}}{(2t+1)!(2s+1)!} = \operatorname{sha} \operatorname{sh} b - \frac{1}{2} [I_0(2\sqrt{ab}) - J_0(2\sqrt{ab})].$$

Частичные суммы выражения в левой части равенства (4) могут быть получены с помощью предложенного алгоритма. Например, используя входные данные

```
> simplify(Res([a*b, -a-b], [0, 1, 0, 1/3!, 0, 1/5!, 0, 1/7!]));
```

получим

$$\frac{ab(b^6 + 42b^4 + 840b^2 + 5040)}{25\,401\,600} \times (a^6 + 42a^4 + 840a^2 + 5040).$$

Пример 2. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} f(z) = z^3 - a^3, \\ g(z) = e^{bz} = 1 + bz + \frac{(bz)^2}{2!} + \dots + \frac{(bz)^n}{n!} + \dots \end{cases}$$

Если z_1, z_2, z_3 — нули многочлена $f(z)$, то, используя определение результата в виде формулы для произведения, получим

$$R(f, g) = g(z_1)g(z_2)g(z_3) = e^{b(z_1+z_2+z_3)}.$$

Применяя формулы Виета для кубического многочлена $f(z)$, получим

$$a_2 = -(z_1 + z_2 + z_3) = 0.$$

Таким образом, $R(f, g) = 1$. Вычисляя теперь результат $R(f, g)$, используя теорему 3, получим соотношение (см. [10])

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ab)^{3k}}{(k!)^3} + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a^{3s} \times \\ & \times \left(3 \frac{b^{3s+6j}}{s!(s+3j)!^2} a^{6j} + 3 \frac{b^{3s+3j}}{s!^2(s+3j)!} a^{3j} \right) + \\ & + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=s+1}^{\infty} \sum_{p=t+1}^{\infty} b_s b_t b_p a^{3s} \times \\ & \times [S_{t-s} \cdot S_{p-s} - S_{t+p-2s}] = 1. \end{aligned}$$

В данном примере ни один из кратных числовых рядов не может быть выражен через известные величины. Однако, используя предложенный алгоритм, частичные суммы выражения в левой части могут быть найдены. Например, используя входные данные

```
> simplify(Res3d([-a^3, 0, 0], [1, b,
b^2/2!, b^3/3!, b^4/4!, b^5/5!, b^6/6!]));
```

получим

$$1 - \frac{a^9 b^9}{4320} + \frac{a^{12} b^{12}}{345600} + \frac{a^{15} b^{15}}{10368000} + \frac{a^{18} b^{18}}{373248000}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен компьютерно-алгебраический подход к вычислению частичных сумм кратных числовых рядов, возникающих при вычислении результата многочлена и целой функции. Разработаны и программно реализованы символьные алгоритмы, один из которых вычисляет степенные суммы корней по рекуррентным формулам Ньютона, а второй на основе вычисления результата позволяет находить частичные суммы некоторых классов кратных числовых рядов. Рассмотрены примеры вычисления таких рядов.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке следующих фондов: первый и третий авторы использовали финансовую поддержку РФФ, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда науки, грант 22-21-20028.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aizenberg L.A.* On one formula of generalized logarithmic residue and solution of the system of nonlinear equations, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (Proc. of the USSR Academy of Sciences)*. 1977. V. 234. № 3. P. 505–508.
2. *Aizenberg L.A., Yuzhakov A.P.* Integral'nye predstavleniya i vychety v mnogomernom kompleksnom analize (Integral Representations and Residues in Multidimensional Complex Analysis), Novosibirsk: Nauka, 1979.
3. *Bykov V.I., Kytmanov A.M., Lazman M.Z.* Elimination methods in polynomial computer algebra, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-Basel, 1998.
4. *Tsikh A.K.* Multidimensional residues and their applications, AMS, Providence, 1992.
5. *Bykov V.I., Tsybenova S.B.* Nelineinye modeli khimicheskoi kinetiki (Nonlinear Models of Chemical Kinetics), Moscow: KRASAND, 2011.
6. *Myshkina E.K.* Some examples of finding the sums of multiple series // *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.* 2014. V. 7. № 4. P. 515–529.
7. *Kytmanov A.A., Kytmanov A.M., Myshkina E.K.* Finding Residue Integrals for Systems of Non-algebraic Equations in \mathbb{C}^n // *Journal of Symbolic Computation*. 2015. V. 66. P. 98–110.
8. *Kytmanov A.A., Kytmanov A.M., Myshkina E.K.* Residue integrals and Waring's formulas for algebraic or even transcendental systems // *Complex Variables and Elliptic Equations*. 2019. V. 64. № 1. P. 93–111.
9. *Kytmanov A.M., Myshkina E.K.* On Some Approach for Finding the Resultant of Two Entire Functions // *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.* 2019. V. 12. № 4. P. 434–438.
10. *Kytmanov A.M., Myshkina E.K.* On Finding the Resultant of Two Entire Functions // *Probl. Anal. Issues Anal.* 2020. V. 9. № 3. P. 119–130.
11. *Kytmanov A.A.* Analogues of recurrent Newton formulas, *Russian Math.* 2009. V. 53. P. 34–44.
12. *Kytmanov A.A.* An algorithm for calculating power sums of roots for a class of systems of nonlinear equations // *Programming and Computer Software*. 2010. V. 36. № 2. P. 103–110.
13. *Bryuno A.D., Batkhin A.B.* Algorithms and programs for calculating the roots of polynomial of one or two variables // *Programming and Computer Software*. 2021. V. 47. № 5. P. 353–373.
14. *Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I.* Integraly i ryady. Elementarnye funktsii (Integrals and Series. Elementary Functions), Moscow: Nauka, Gl. red. fiz.-mat. lit, 1981.

ON CALCULATING PARTIAL SUMS OF MULTIPLE NUMERICAL SERIES BY METHODS OF COMPUTER ALGEBRA

© 2024 V. I. Kuzovator^a, A. A. Kytmanov^{a, b}, E. K. Myshkina^a

^a*Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia*

^b*MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia*

A method to calculate partial sums of some multiple numerical series arising when searching for the resultant of a polynomial and an entire function is proposed. One can apply a symbolic algorithm that uses recurrent Newton formulas to find power sums of roots included in this formula without finding the very roots of the system. The algorithm that implements the proposed approach to calculate partial sums of multiple numerical series is implemented in Maple. Examples of using this algorithm to find partial sums of some classes of multiple numerical series are given.

Keywords: multiple numerical series, power sums of roots, recurrent Newton formulas, methods of Computer Algebra