

УДК 004.422.8

СИМВОЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ФОРМАЛИЗМЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

© 2024 г. А. В. Королькова^{a, *}, М. Н. Геворкян^{a, **}, А. В. Фёдоров^{a, ***},
К. А. Штепа^{a, ****}, Д. С. Кулябов^{a, b, *****}

^aРоссийский университет дружбы народов, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Россия

^bОбъединенный институт ядерных исследований, 141980 Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, д. 6, Россия

*E-mail: korolkova-av@rudn.ru

**E-mail: gevorgyan-mn@rudn.ru

***E-mail: 1042210107@rudn.ru

****E-mail: 1042210111@pfur.ru

*****E-mail: kulyabov-ds@rudn.ru

Поступила в редакцию 01.08.2023

После доработки: 10.09.2023

Принята к публикации 01.10.2023

Для описания физических и технических систем авторы используют разные реализации алгебры Клиффорда: спиноры, кватернионы, геометрическую алгебру. Формализм геометрической алгебры является сравнительно новым подходом, ориентированным в первую очередь на инженеров и прикладных исследователей. В целом ряде работ авторы рассмотрели реализацию формализма геометрической алгебры для систем компьютерной алгебры. В данной статье авторы расширяют эллиптическую геометрическую алгебру на гиперболическую пространственно-временную алгебру. В качестве иллюстрации используются разные представления уравнений Максвелла. С помощью системы компьютерной алгебры выполнен переход от вакуумных уравнений Максвелла в представлении пространственно-временной алгебры к уравнениям Максвелла в векторном формализме. Кроме практического применения, авторы хотели бы обратить внимание на дидактическое значение данных исследований.

Ключевые слова: геометрическая алгебра, алгебра Клиффорда, система компьютерной алгебры SymPy, Galgebra

DOI: 10.31857/S0132347424020078 EDN: ROSDXW

1. ВВЕДЕНИЕ

Разные реализации геометрической алгебры рассматривались авторами в работах [1] (обзор различных реализаций), [2] (реализация на языке Julia), [3] (реализации на основе библиотеки SymPy). В работе [4] демонстрировалось применение геометроалгебраического подхода к геометризованному представлению уравнений Максвелла [5, 6]. Все исследования реализовывались на основе систем компьютерной алгебры. Таким образом, данная работа продолжает наш цикл исследований. В данной статье рассматривается мультивекторная запись уравнений Максвелла.

Геометрическая алгебра основывается на работах Г. Г. Грассмана [7], У. Р. Гамильтона [8], У. К. Клиффорда [9]. В геометрической алгебре рассматривается конкретная реализация алгебры Клиффорда, основанная на мультивекторах, которая включает в себя реализацию алгебры Грассмана в виде внешней алгебры p -векторов (контравариантных антисим-

метричных тензоров с операцией внешнего умножения). Алгебра кватернионов также является частным случаем алгебры мультивекторов.

В статье символьные вычисления производятся с помощью модуля Galgebra [10, 11], основанного на пакете символьной алгебры SymPy [12, 13] для языка Python.

1.1. Структура статьи

В разделе 1.2 даются основные обозначения и соглашения, применяемые в статье. В разделе 2 излагаются основы алгебраической геометрии. Данное направление изучает ассоциативную алгебру мультивекторов, являющуюся реализацией абстрактной алгебры Клиффорда. Развитый в данной области математический аппарат пока не получил широкой известности, поэтому авторам показалось необходимым кратко изложить его основы. В разделе 3 по шагам производится переход от стандартного векторного формализма к формализму геометрической алгебры

на примере системы вакуумных уравнений Максвелла. В мультивекторной записи уравнения Максвелла сводятся к одному уравнению. В разделе 4 мы выполним в некотором роде обратную задачу, но теперь нашей целью будет демонстрация использования программных средств компьютерной алгебры.

1.2. Обозначения и соглашения

1. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы α, β будут относиться к четырёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\alpha = \overline{0, 3}$. Латинские индексы из середины алфавита i, j, k будут относиться к трёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $i = \overline{1, 3}$.

2. Контравариантные векторы (или просто векторы) будем обозначать строчными латинскими буквами и выделять с помощью полужирного шрифта, например $\mathbf{v}, \mathbf{x}$.

3. Линейное пространство контравариантных векторов будем обозначать буквой L и полагать существование базиса $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$. Нумерацию векторов базиса будем вести нижними индексами от 1 до n . Буквой n всегда будем обозначать размерность пространства L , т.е. $\dim L = n$.

4. Под полем скаляров будем подразумевать поле действительных чисел $\mathbb{R}$, хотя многие формулы и утверждения остаются справедливыми для любого произвольного поля R . Скаляры будем обозначать строчными греческими буквами α, β и т.д.

5. Будем полагать, что пространство L наделено структурой скалярного произведения и базис $\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$ является ортонормированным.

6. Скалярное произведение векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ будем обозначать $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, векторное произведение — $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$ или $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, смешанное произведение трех векторов — $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$.

7. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СИ [14]. Это вызвано тем, что формализм геометрической алгебры и пространственно-временной алгебры ориентируется, в первую очередь, на инженеров.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ

2.1. Основные понятия геометрической алгебры

Геометрическая алгебра является реализацией абстрактной алгебры Клиффорда [9], где элементами являются *мультивекторы*, а операцией “умножения” — операция *геометрического умножения*.

Мультивектор является градуированным объектом, представляющим собой линейную комбинацию разложимых p -векторов (кососимметричных ковариантных тензоров). Сами p -векторы совместно с операцией внешнего произведения $\wedge$ представляют собой реализацию абстрактной алгебры Грассмана [7]. Основным отличительным свойством внешнего произведения векторов является свойство *кососимметричности*: $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v} = 0$. Более подробно о внешней алгебре можно прочитать в фундаментальных работах [15–21].

Рассмотрим четырехмерное пространство Минковского (пространство-время) $E_{1,3}^4$ с базисом $\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$, метрическим тензором $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ (иначе говоря с сигнатурой $(+, -, -, -)$):

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) = 1, \quad (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_i) = 0, \quad (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -\delta_{ij}.$$

Операцию *геометрического умножения* для двух векторов $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_{1,3}^4$ можно определить конструктивно с помощью формулы:

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{u} \wedge \mathbf{v},$$

где сама операция не обозначается никаким знаком. Результатом действия геометрического произведения является элемент градуированной алгебры Клиффорда, называемой *геометрической алгеброй*.

Работа с геометрической алгеброй упрощается, если введен ортогональный базис. В случае пространства Минковского из определения геометрического умножения выводятся два ключевых свойства для базисных векторов:

$$\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = -\mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\alpha, \quad \alpha \neq \beta \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = -1, \quad \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_0 = +1.$$

Также $\mathbf{e}_\alpha \wedge \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta$, $\mathbf{e}_\alpha \wedge \mathbf{e}_\beta \wedge \mathbf{e}_\gamma = \mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta \mathbf{e}_\gamma$ и т.д. Часто используют обозначение $\mathbf{e}_\alpha \mathbf{e}_\beta = \mathbf{e}_{\alpha\beta}$ и т.д.

В пространстве-времени операция внешнего произведения порождает четыре внешние алгебры:

- алгебру 1-векторов с базисом $\langle \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$;
- алгебру 2-векторов (бивекторов) с базисом $\langle \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \rangle$;
- алгебру 3-векторов с базисом $\langle \mathbf{e}_{012}, \mathbf{e}_{013}, \mathbf{e}_{023}, \mathbf{e}_{123} \rangle$;
- алгебру 4-векторов (квадривекторов) с одним базисным 4-вектором $\mathbf{e}_{0123}$, который обычно обозначают как I .

Шесть бивекторных базисов распадаются на два класса — пространственно-временной базис $\{\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3\}$ и чисто пространственный базис $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$. Пространственно-временные базисы обладают свойством гиперболической мнимой единицы, т.е. $\mathbf{e}_{0i} \mathbf{e}_{0i} = 1$, а чисто пространственные — свойством эллиптической мнимой единицы, т.е. $\mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ij} = -1$.

Можно составить следующие таблицы геометрического умножения:

	$\mathbf{e}_{01}$	$\mathbf{e}_{02}$	$\mathbf{e}_{03}$
$\mathbf{e}_{01}$	1	$-\mathbf{Ie}_{03}$	$\mathbf{Ie}_{02}$
$\mathbf{e}_{02}$	$\mathbf{Ie}_{03}$	1	$-\mathbf{Ie}_{01}$
$\mathbf{e}_{03}$	$-\mathbf{Ie}_{02}$	$\mathbf{Ie}_{01}$	1
	$\mathbf{e}_{12}$	$\mathbf{e}_{13}$	$\mathbf{e}_{23}$
$\mathbf{e}_{12}$	-1	$\mathbf{e}_{23}$	$-\mathbf{e}_{13}$
$\mathbf{e}_{13}$	$-\mathbf{e}_{23}$	-1	$\mathbf{e}_{12}$
$\mathbf{e}_{23}$	$\mathbf{e}_{13}$	$-\mathbf{e}_{12}$	-1

Из первой таблицы видно, что пространственно-временные базисы изоморфны матрицам Паули (с точности до знаков), поэтому в [19, стр. 135] для обозначения $\mathbf{e}_{0i}$ используется буква сигма σ_i .

2.2. Дифференциальные операторы

Введем оператор *векторной производной* (vector derivative) [19, стр. 168], определяемый следующей формулой:

$$\nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \mathbf{e}^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \dots + \mathbf{e}^n \frac{\partial}{\partial x^n},$$

где $\{\mathbf{e}^i\}$ — *взаимный базис* (reciprocal frame), векторы которого определяются следующим образом:

$$(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta_j^i.$$

Для произвольного вектора $\mathbf{x}$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}^i, \mathbf{x}) &= (\mathbf{e}^i, x^j \mathbf{e}_j) = x^j (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \\ &= x^j \delta_j^i = x^i \Rightarrow x^i = (\mathbf{e}^i, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

В случае ортонормированного евклидова пространства $\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$. В случае трехмерного или двумерного ортонормированного евклидова пространства оператор ∇ совпадает с классическим дифференциальным оператором $\vec{\nabla}$. С помощью ∇ и геометрического умножения можно записать операции градиента, дивергенции и ротора классического векторного анализа, а также обобщить их на большие размерности и метрики, отличные от ортонормированной.

Умножив геометрически ∇ на скалярную функцию $f(\mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n$, получим формулу для градиента:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n} \right),$$

который представляет собой вектор, записанный в взаимном базисе $\langle \mathbf{e}^1, \dots, \mathbf{e}^n \rangle$.

Умножим ∇ на векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и получим сумму скалярной и бивекторной частей:

$$\nabla \mathbf{u} = (\nabla, \mathbf{u}) + \nabla \wedge \mathbf{u}.$$

Скалярная часть является обобщением оператора дивергенции. Используем равенство $x^i = (\mathbf{e}^i, \mathbf{x})$ и запишем:

$$\begin{aligned} (\nabla, \mathbf{u}(\mathbf{x})) &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{e}^i, \mathbf{u} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathbf{e}^i, \mathbf{u}) = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} = \frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial u^n}{\partial x^n}. \end{aligned}$$

Бивекторная часть обобщает операцию ротора:

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = \mathbf{e}^i \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^i} = \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \mathbf{e}^i \wedge \mathbf{e}_j.$$

3. МУЛЬТИВЕКТОРНАЯ ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Получим мультивекторную запись вакуумных уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме в системе СИ имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{D} = \rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{B}$ — вектор индукции магнитного поля, $\mathbf{E}$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{H}$ — напряжённость магнитного поля, $\mathbf{D}$ — электрическая индукция, $\mathbf{j}$ — вектор плотности внешнего электрического тока, ρ — плотность электрического заряда.

3.1. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме для изотропной среды

Диэлектрическую и магнитную проницаемости положим равными единице, т.е. $\varepsilon = \mu = 1$ (вакуум). Кроме того, будем считать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{B}, \\ \mathbf{D} &= \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда вакуумные уравнения Максвелла в дифференциальной форме (1) приобретают вид:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}, \\ \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

При этом для плотностей тока $\mathbf{j}$ и заряда ρ выполняется уравнение непрерывности:

$$\vec{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Символом ∇ в данной системе обозначен оператор набла, с помощью которого записаны операторы ротора $\vec{\nabla} \times$ и дивергенции $\vec{\nabla} \cdot$. Далее данный символ будет выступать только в роли оператора векторной производной.

Отметим, что все векторы в данной записи уравнений Максвелла являются векторами трехмерного Евклидова пространства (а точнее векторными полями, зависящими явно от трех координат и неявно от времени t). Их компоненты обозначаются с нижними индексами x, y, z , например E_x, E_y, E_z .

3.2. Мультивектор Фарадея

Рассмотрим теперь необходимые элементы, с помощью которых можно записать уравнения Максвелла в мультивекторном виде. Для этого введем пространство Минковского с сигнатурой $(+, -, -, -)$ и базисными векторами $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Оператор векторной производной в этом базисе записывается следующим образом:

$$\nabla = \mathbf{e}_0 \frac{\partial}{\partial x^0} - \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x^1} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x^2} - \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{\partial x^3},$$

так как взаимный базис $\{\mathbf{e}^\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$ имеет вид $\langle \mathbf{e}_0, -\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3 \rangle$, в чем можно убедиться, вычислив скалярные произведения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0) &= 1, \\ (\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1) &= 1, \\ (\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2) &= 1, \\ (\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_3) &= 1. \end{aligned}$$

Единичный элемент объема $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ обозначим как $\mathbf{I}$.

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ представим в виде бивектора с тремя пространственно-временными компонентами:

$$\mathbf{E} = E^{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + E^{20} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 + E^{30} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0.$$

Бивекторные компоненты E^{10}, E^{20}, E^{30} соответствуют координатам вектора E_x, E_y, E_z классической векторной записи. Хотя у бивектора в четырехмерном пространстве Минковского может быть шесть ненулевых компонент, бивектор $\mathbf{E}$ имеет только три указанные ненулевые компоненты.

Аналогично представим индукцию магнитного поля $\mathbf{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B^{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + B^{20} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 + B^{30} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0 = \\ &= B_x \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + B_y \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 + B_z \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0. \end{aligned}$$

Объединим плотность электрического заряда ρ (скаляр) и плотность внешнего электрического тока $\mathbf{j}$ (вектор) в четырехмерный пространственно-временной вектор $\mathbf{J}$. Вектор $\mathbf{J}$ будем называть пространственно-временной плотностью электрического тока [19, стр. 230] и запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \rho \mathbf{e}_0 + j^1 \mathbf{e}_1 + j^2 \mathbf{e}_2 + j^3 \mathbf{e}_3 = \\ &= \rho \mathbf{e}_0 + j_x \mathbf{e}_1 + j_y \mathbf{e}_2 + j_z \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Если умножить $\mathbf{J}$ справа на $\mathbf{e}_0$, то получим мультивектор со скалярной и бивекторной частями:

$$\mathbf{J} \mathbf{e}_0 = \rho + j_x \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + j_y \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 + j_z \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0.$$

Следовательно, плотность электрического тока $\mathbf{j}$ можно представить в виде бивектора $j^{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + j^{20} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 + j^{30} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0$ с пространственно-временными компонентами (по аналогии с представлением $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$).

Наконец составим бивектор Фарадея $\mathbf{F}$ как сумму бивекторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{I} \mathbf{B}$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + \mathbf{I} \mathbf{B}.$$

При умножении на $\mathbf{I}$ пространственно-временные бивекторные базисы $\mathbf{e}_0 \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_3$ превращаются в чисто пространственные:

$$\mathbf{I} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \mathbf{I} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 = +\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3, \mathbf{I} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2,$$

из-за чего бивектор Фарадея имеет шесть компонент — максимально возможное количество компонент в четырехмерном пространстве Минковского:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= E^{10} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_0 + E^{20} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_0 + E^{30} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_0 - \\ &- B^{10} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + B^{20} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - B^{30} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Теперь уравнения Максвелла можно записать в очень компактной форме:

$$\nabla \mathbf{F} = \mathbf{J}.$$

4. ВЫВОД ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА ИЗ МУЛЬТИВЕКТОРНОЙ С ПОМОЩЬЮ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Используем библиотеку Galgebra для того, чтобы вычислить компоненты мультивектора $\nabla \mathbf{F} - \mathbf{J}$ в декартовых координатах.

Вначале импортируем все необходимые модули:

```

import sympy as sp
from galgebra.ga import Ga
from galgebra.printer import latex #
→ функция нужна для распечатки исходного
→ кода LaTeX формул
from IPython.display import Math,
→ DisplayObject # Функции нужны для
→ отображения обработки и отображения
→ LaTeX формул

sp.init_printing(latex_printer=latex,
→ use_latex='mathjax',
→ use_unicode=True)

```

Все вычисления мы будем проводить в интерактивной оболочке Jupyter Notebook [22]. Настроим отображение формул с помощью вызова следующей функции:

```

m4d = Ga('e', g=[1,-1,-1,-1],
→ coords=sp.symbols('t, x, y,
→ z', real=True))

```

После всех настроек зададим пространство Минковского и структуру геометрической алгебры на нем:

```
(grad, rgrad) = m4d.grads()
```

Здесь мы указываем символ **e**, который будет использоваться для обозначения базисного вектора, а также символы **t, x, y, z**, используемые для обозначения индексов. Также в параметре **g** указывается метрика, которая может быть только диагональной, но не обязательно нормированной.

Далее в отдельные переменные записываем базисные векторы, пространственно-временную часть бивекторного базиса и квадриквекторный базисный элемент **I**:

```

# Пространственно временная часть
→ бивекторного базиса
σ1 = e10 = e1*e0
σ2 = e20 = e2*e0
σ3 = e30 = e3*e0

I = e0*e1*e2*e3

Ex = sp.Function('E_1')(t,x,y,z)

```

Греческие буквы можно вводить в блокноте Jupyter с помощью их обозначений в формате LaTeX.

Для этого следует набрать, например, `\sigma` и нажать клавишу **Tab**.

Для использования оператора векторной производной следует вызвать метод **grads** объекта **m4d** класса **Ga**:

```
(grad, rgrad) = o3d.grads()
```

Этот метод возвращает правый и левый операторы векторной производной, так как геометрическое умножение не коммутативно и при умножении слева следует использовать **grad**, а справа **rgrad**. Их значения равны соответственно:

$$\mathbf{e}_t \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{e}_t - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x - \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y - \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z.$$

Такое разграничение двух операторов имеет смысл только в рамках модуля **Galgebra** в силу ограничений синтаксиса языка Python.

Далее задаем компоненты электрического и магнитного полей, вектор тока и плотность заряда как функции от переменных **t, x, y, z**:

```

Ez = sp.Function('E_3')(t,x,y,z)

Bx = sp.Function('B_1')(t,x,y,z)
By = sp.Function('B_2')(t,x,y,z)
Bz = sp.Function('B_3')(t,x,y,z)

jx = sp.Function('j_1')(t,x,y,z)
jy = sp.Function('j_2')(t,x,y,z)
jz = sp.Function('j_3')(t,x,y,z)

ρ = sp.Function('ρ')(t,x,y,z)

```

напряженность электрического поля

После этого можно записать **E, B, j** и **ρ**:

```

# индукция магнитного поля
B = Bx*σ1 + By*σ2 + Bz*σ3
# плотность внешнего электрического тока
j = jx*σ1 + jy*σ2 + jz*σ3
# Пространственно-временной вектор тока
J = ρ*e0 + jx*e1 + jy*e2 + jz*e3

```

Бивектор Фарадея

Теперь можно составить бивектор Фарадея:

Бивектор Фарадея

В результате получим следующий бивектор с полным набором как пространственных, так и пространственно-временных компонент:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{E}_x \mathbf{e}_{tx} - \mathbf{E}_y \mathbf{e}_{ty} - \mathbf{E}_z \mathbf{e}_{tz} - \\ - \mathbf{B}_z \mathbf{e}_{xy} + \mathbf{B}_y \mathbf{e}_{xz} - \mathbf{B}_x \mathbf{e}_{yz}.$$

Запишем теперь уравнения Максвелла в виде мультивектора:

- уравнение непрерывности из равенства
 $\hookrightarrow$ нулю скалярной части получившегося
 $\hookrightarrow$ мультивектора;

Данный мультивектор имеет ненулевую векторную и тривекторную части. Приравняв весь мультивектор к нулю, мы получим дифференциальную форму уравнений Максвелла, если распишем отдельные компоненты данного мультивектора.

Векторную часть можно вычленишь, вызвав метод **grade**:

Eq.grade(1)

Эта часть обладает следующими компонентами:

$$-\rho + \frac{\partial E_x}{\partial x} x + \frac{\partial E_y}{\partial y} y + \frac{\partial E_z}{\partial z} z, \\ -j_x - \frac{\partial B_y}{\partial z} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ -j_y + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ -j_z - \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial t}.$$

Приравнивание полученных компонент векторной части к нулю даст нам первое и третье уравнения из системы (3). В свою очередь, тривекторная часть получается вызовом метода **Eq.grade(3)** и также имеет четыре компоненты:

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ -\frac{\partial B_x}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

приравняв которые к нулю мы получим второе и четвертое уравнения из (3).

Взяв повторно векторную производную:

ПРОГРАММИРОВАНИЕ № 2 2024

$$\nabla \nabla \mathbf{F} - \nabla \mathbf{J} = 0, \quad (4)$$

получим мультивектор со скалярной и полной бивекторной частями (с шестью компонентами).

Равенство нулю скалярной части выражения (4) дает уравнение непрерывности. Равенство нулю пространственно-временных компонент в выражении (4) дает волновое уравнение для электрического поля. Равенство нулю чисто пространственных компонент выражения (4) дает волновое уравнение для магнитного поля.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье была рассмотрена мультивекторная запись уравнений Максвелла. Работу следует рассматривать как продолжение цикла исследований по реализации геометрической алгебры и пространственно-временной алгебры для систем компьютерной алгебры. Статья носит не только прикладной, но и учебно-методический характер, поскольку в ней кроме демонстрации инструментального применения систем компьютерной алгебры рассмотрен вопрос получения с их помощью новых (не столь сложных, но скорее непривычных) математических формализмов для решения конкретных задач.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Публикация выполнена в рамках проекта № 021934-0-000 Системы грантовой поддержки научных проектов РУДН (Королькова А.В., Геворкян М.Н.) и при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН (Кулябов Д.С., Фёдоров А.В., Штепа К.А.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геворкян М.Н., Королькова А.В., Кулябов Д.С. Реализация геометрической алгебры в системах символьных вычислений // Программирование. 2023. № 1. С. 48–55.
2. Геворкян М.Н., Демидова А.В., Велиева Т.Р. Аналитико-численная реализация алгебры поливекторов на языке Julia // Программирование. 2022. № 1. С. 54–64.
3. Велиева Т.Р., Геворкян М.Н., Демидова А.В. Аппарат геометрической алгебры и кватернионов в системах символьных вычислений для описания вращений в евклидовом пространстве // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63. № 1. С. 31–42.
4. Королькова А.В., Геворкян М.Н., Кулябов Д.С., Севастьянов Л.А. Средства компьютерной алгебры для геометризаций уравнений Максвелла // Программирование. 2023. Т. 49. № 4. С. 33–38.

5. *Kulyabov D. S.* Using two Types of Computer Algebra Systems to Solve Maxwell Optics Problems // Programming and Computer Software. 2016. V. 42. № 2. P. 77–83. arXiv: 1605.00832.
6. *Kulyabov D.S., Korolkova A.V., Sevastianov L.A. et al.* Algorithm for Lens Calculations in the Geometrized Maxwell Theory // Saratov Fall Meeting 2017: Laser Physics and Photonics XVIII; and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data IV / Ed. by Vladimir L. Derbov, Dmitry E. Postnov. Vol. 10717 of Progress in Biomedical Optics and Imaging – Proceedings of SPIE. Saratov: SPIE, 2018. 4. P. 107170Y.1–6. arXiv : 1806.01643.
7. *Grassmann H.G.* Die Mechanik nach den Principien der Ausdehnungslehre // Mathematische Annalen. 1877. 6. Bd. 12, H. 2. S. 222–240.
8. *Kuipers J.B.* Quaternions And Rotation Sequences. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2002. 400 p.
9. *Clifford W.K.* Applications of Grassmann's Extensive Algebra // American Journal of Mathematics. 1878. V. 1. № 4. P. 350–358.
10. *GAgebra — Symbolic Geometric Algebra/ Calculus package for SymPy.* 2023. <https://galgebra.readthedocs.io/en/latest/index.html>.
11. *Velieva T.R., Gevorkyan M.N., Demidova A.V. et al.* Geometric Algebra and Quaternion Techniques in Computer Algebra Systems for Describing Rotations in Euclidean Space // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2023. V. 63. № 1. P. 29–39.
12. *Sandon D.* Symbolic Computation with Python and SymPy. 2021. V. 1. 580 p.
13. *Sandon D.* Symbolic Computation with Python and SymPy. 2021. V. 2. 429 p.
14. The international system of units (SI) / Ed. by David B. Newell, Eite Tiesinga. NIST Special Publication 330. National Institute of Standards and Technology, 2019. Aug. 122 p.
15. *Dorst L., Fontijne D., Mann S.* Geometric algebra for computer science (with errata). The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics. 1 edition. Morgan Kaufmann, 2007.
16. *de Sabbata V., Datta B.K.* Geometric Algebra and Applications to Physics. Taylor & Francis, 2006. 12. 184 p.
17. *Rosn A.* Geometric Multivector Analysis. Springer International Publishing, 2019. 465 p.
18. *Rodrigues Jr W.A., de Oliveira E.C.* The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. Springer International Publishing, 2016. V. 922 of Lecture Notes in Physics. 587 p.
19. *Doran C., Lasenby A.* Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, 2003. May. 578 p.
20. *Chisolm E.* Geometric Algebra. 2012. arXiv : 1205.5935.
21. *Lasenby A., Doran C., Arcaute E.* Applications of Geometric Algebra in Electromagnetism, Quantum Theory and Gravity // Clifford Algebras / Ed. by R. Abamowicz. Birkhuser Boston, 2004. Vol. 34 of Progress in Mathematical Physics. 467–489 p.
22. *Toomey D.* Learning Jupyter. Packt Publishing Ltd., 2016. 305 p.

SYMBOLIC STUDIES OF MAXWELL'S EQUATIONS IN SPACE-TIME ALGEBRA FORMALISM

© 2024 г. A. V. Korol'kova^a, M. N. Gevorkyan^a, A. V. Fedorov^a, K. A. Shtepa^a, D. S. Kulyabov^{a, b}

^a*RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198 Russia*

^b*Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow oblast, 141980 Russia*

Different implementations of Clifford algebra: spinors, quaternions, and geometric algebra, are used to describe physical and technical systems. The geometric algebra formalism is a relatively new approach, destined to be used primarily by engineers and applied researchers. In a number of works, the authors examined the implementation of the geometric algebra formalism for computer algebra systems. In this article, the authors extend elliptic geometric algebra to hyperbolic space-time algebra. The results are illustrated by different representations of Maxwell's equations. Using a computer algebra system, Maxwell's vacuum equations in the space-time algebra representation are converted to Maxwell's equations in vector formalism. In addition to practical application, the authors would like to draw attention to the didactic significance of these studies.

Keywords: geometric algebra, Clifford algebra, computer algebra system SymPy, Galgebra

REFERENCES

1. *Gevorkyan M.N., Korol'kova A.V., Kulyabov D.S., Demidova A.V., Velieva T.R.* Implementation of geometric algebra in computer algebra systems // Program. Comput. Software, 2023, vol. 49, no. 1, pp. 42–48.
2. *Gevorkyan M.N., Demidova A.V., Velieva T.R., Korol'kova A.V., Kulyabov D.S.* Analitical-numerical implementation of polyvector algebra in Julia // Program. Comput. Software, 2022, vol. 48, no. 1, pp. 49–58.
3. *Velieva T.R., Gevorkyan M.N., Demidova A.V., Korol'kova A.V., Kulyabov D.S.* Geometric algebra

- quaternion techniques in computer algebra system for describing rotation in Euclidean space, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2023, vol. 63, no. 1, pp. 31–42.
4. *Korol'kova A.V., Gevorkyan M.N., Kulyabov D.S., Sevast'yanov L.A.* Computer algebra tools for geometrization of Maxwell's equations, *Program. Comput. Software*, 2023, vol. 49, no. 4, pp. 366–371.
 5. *Kulyabov D.S.* Using two types of computer algebra systems to solve Maxwell optics problems, *Program. Comput. Software*, 2016, vol. 42, no. 2, pp. 77–83. arXiv: 1605.00832.
 6. *Kulyabov D.S., Korolkova A.V.* Algorithm for lens calculations in the geometrized Maxwell theory, *Saratov Fall Meeting 2017: Laser Physics and Photonics XVIII; and Computational Biophysics and Analysis of Biomedical Data IV; Proceedings of SPIE*, Saratov: SPIE, 2018. arXiv: 1806.01643.
 7. *Grassmann H.G.* Die mechanik nach den principiender ausdehnungslehre, *Mathematische Annalen*, 1877, vol. 12, no. 2, pp. 222–240.
 8. *Kuipers J.B.* Quaternions and Rotation Sequences, Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2002.
 9. *Clifford W.K.* Applications of grassmann's extensive algebra, *Am. J. Math.*, 1878, vol. 1, no. 4, pp. 350–358.
 10. *GAlgebra Symbolic Geometric Algebra/Calculus Package for SymPy*, 2023. URL: <https://galgebra.readthedocs.io/en/latest/index.html>.
 11. *Velieva T.R., Gevorkyan M.N., Demidova A.V., Korol'kova A.V., Kulyabov D.S.* Geometric algebra quaternion techniques in computer algebra system for describing rotation in Euclidean space // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2023, vol. 63, no. 1, pp. 29–39.
 12. *Sandon D.* Symbolic Computation with Python and SymPy, 2021, vol. 1, p. 580.
 13. *Sandon D.* Symbolic Computation with Python and SymPy, 2021, vol. 2, p. 429.
 14. The international system of units (SI), David, B., Ed., Newell: Eite Tiesinga. NIST Special Publication, 2019.
 15. *Dorst L., Fontijne D., Mann S.* Geometric Algebra for Computer Science (with Errata). The Morgan Kaufmann Series in Computer Graphics, Morgan Kaufmann, 2007.
 16. *de Sabbata V., Datta B.K.* Geometric Algebra and Applications to Physics, Taylor & Francis, 2006.
 17. *Rosn A.* Geometric Multivector Analysis. Springer, 2019.
 18. *Rodrigues Jr. W.A., de Oliveira E.C.* The Many-Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. Springer, 2016.
 19. *Doran C., Lasenby A.* Geometric Algebra for Physicists. Cambridge University Press, 2003.
 20. *Chisolm E.* Geometric Algebra, 2012. arXiv: 1205.5935
 21. *Lasenby A., Doran C., Arcaute E.* Applications of geometric algebra in electromagnetism, quantum theory and gravity, in *Clifford Algebras*, Abamowicz, R., Ed., Boston: Birkhuser, 2004.
 22. *Toomey D.* Learning Jupyter, Packt Publishing Ltd., 2016.