ПРОГРАММИРОВАНИЕ, 2024, № 1, с. 3–14

ТЕОРИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ: ФОРМАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ И СЕМАНТИКА

УДК 510.22

НЕЧЕТКАЯ МЕРА НА p-АДИЧЕСКИХ ШАРАХ, ЗАДАННЫХ НА ОГРАНИЧЕННОМ ЧИСЛОВОМ МНОЖЕСТВЕ

В. П. Бочарников[a],* (ORCID: 0000-0003-4398-5551),
С. В. Свешников[a] (ORCID: 0000-0001- 8924-4535)

[a]*Консалтинговая группа ИНЭКС-FT, 03011 Киев, ул. Десятинная, д. 13а, Украина*
**E-mail: bocharnikovvp@gmail.com*

Поступила в редакцию 24.04.2023 г.
После доработки 27.05.2023 г.
Принята к публикации 03.07.2023 г.

В статье рассматривается подход к построению нечеткой меры на p-адических шарах, не требующий непосредственного задания плотности меры. Доказаны соотношения, необходимые для определения данной меры произвольного подмножества ограниченного числового множества, представленного как множество p-адических шаров. Рассмотрены равномерные и неоднородные нечеткие меры. Предложен алгоритм определения нечеткой меры на p-адических шарах. Приведены примеры расчета данной меры.

Ключевые слова: нечеткая мера, p-адические шары, p-адические числа, множество, ультраметрика
DOI: 10.31857/S0132347424010011 **EDN:** HVVDTA

1. ВВЕДЕНИЕ

Для практического моделирования сложных энергетических ландшафтов, представляемых скалярными полями, был предложен эффективный подход на основе формализации расположения энергетических бассейнов [1]. Данные бассейны предопределяют иерархическую структуру рассматриваемого пространства X. В скалярном поле каждой точки пространства (как правило, $X=R^n$, где R — множество действительных чисел), ставится в соответствие скалярная величина $v(x)$: $X\to R$, которая может отражать уровень энергии в рассматриваемой точке. В условиях неопределенности значение уровня энергии соответствующего энергетического бассейна может быть описано в виде величины, пропорциональной значению нечеткой меры подмножества пространства X [2]. Исходные данные в этом случае могут быть представлены в виде суждений "S есть P" [3], где S — субъект суждения (понятие, о котором что-либо утверждается), P — предиката суждения (то, что утверждается о субъекте). Например, "Энергия (S) в рассматриваемом энергетическом бассейне возможно (*есть*) высокая (P)". Нечеткая мера $g(\cdot):2^X\to[0,1]$, как неаддитивная функция множества, является эффективным инструментом формализации таких нечетких исходных данных [2]. Например, значение $g(A)$ может определять величину, пропорциональную относительному значению энергии в бассейне $A\subseteq X$ (как вариант, уверенность в том, что энергия "очень высокая"). В отличие от обычного представления исходных данных в виде "признак—значение", нечеткая мера позволяет учесть модальность суждения, которая относится к связке "*есть*" в суждении. В общем случае модальность (от лат. modus — мера, способ) — способ существования какого-либо объекта или протекания какого-либо процесса, или же способ понимания суждения об объекте, явлении или событии [4]. Для нашего примера могут быть рассмотрены алетические модальности "*необходимость, доверие, вероятность, правдоподобие, возможность*", которые уточняют исходное суждение и существенно повышают адекватность моделирования в условиях неопределенности.

В работе мы будем рассматривать нечеткие меры $g(\cdot)$ Сугэно [2], которые получили наибольшее распространение на практике. Хотя следует отметить, что основные результаты и выводы, полученные при дальнейшем рассмотрении, могут быть использованы и для нечетких мер другого типа (например, нечетких мер Цукомото [5]). Нечеткие меры $g(\cdot)$ Сугэно являются неаддитивными функциями множества, удовлетворяющими свойствам ограниченности $g(\varnothing)=0$, $g(X)=1$, монотонности $\forall A,B\subseteq X$, $A\subseteq B, g(A)\le g(B)$, непрерывности $\forall F_n\subseteq X$, $g(\lim\limits_{n\to\infty}F_n)=\lim\limits_{n\to\infty}g(F_n)$, где $\{F_n\}$ — монотонная возрастающая или убывающая последовательность подмножеств, а также λ-правилу

$$\forall A,B\subseteq X,\ A\cap B=\varnothing, g(A\cup B)=$$
$$=\frac{1}{\lambda}\cdot\Big(\big(1+g(A)\cdot\lambda\big)\cdot\big(1+g(B)\cdot\lambda\big)-1\Big)=$$
$$=g(A)+g(B)+\lambda\cdot g(A)\cdot g(B),$$

где $\lambda \in [-1, +\infty[$. Важнейшим свойством меры $g(\cdot)$ Сугэно является наличие функциональной зависимости алетической модальности меры от параметра нормировки λ нечеткой меры. В частности, если $\lambda = -1$, то мы имеем меры с модальностью возможности, если $\lambda \in [-1, 0[$ — то рассматриваются меры правдоподобия, при $\lambda = 0$ меры будут иметь модальность "вероятно", если же $\lambda > 0$, то рассматриваются меры доверия, а при $\lambda \gg 0$ модальность суждения стремится к необходимости. Таким образом, учет модальности в нечеткой мере $g(\cdot)$ Сугэно позволяет уточнить исходные данные в виде суждений, повысить адекватность моделирования сложных энергетических ландшафтов, представляемых скалярными полями.

Однако проблемой для применения на практике нечетких мер является задание (определение, измерение, оценка ...) их значений. Для непрерывного случая задание нечеткой меры предполагает возможность нахождения функции плотности нечеткой меры $g(x)$: $X \to [0, 1]$ в точках $x \in X \subseteq R$ [6] множества вещественных чисел со стандартной метрикой. На практике, как правило, множество X является ограниченным числовым множеством (далее будем полагать $X = I = [0,1]$). То есть предполагается, что данные точки в I можно определить и в них произвести измерение значения меры. Здесь следует отметить, как минимум, два момента. Во-первых, на практике какие-либо реальные измерения могут быть осуществлены только в точках, соответствующих полю рациональных чисел Q [7]. При этом для определения всех $x \in I \subset R$ необходимо выполнить пополнение поля рациональных чисел Q до поля действительных чисел R по евклидовой норме. Во-вторых, даже задав точки $x \in X$, определить функцию плотности меры $g(x)$ сложно, так как концептуально в теории нечеткой меры предполагается, что распределение уверенности по точкам множества I принципиально неизвестно [8] и может быть оценено только на некоторых подмножествах множества I. В этом случае предполагается, что построение нечеткой меры осуществляется по оценкам уверенности на данных подмножествах, которые иногда называют фокальными элементами. Например, может использоваться подход на основе функции меры фокальных элементов [9] $m(\cdot)$: $2^I \to [0,1]$, для которой выполняются условия

$$m(E_j) > 0, \ \sum_{j=1}^{K} m(E_j) = 1,$$

где $\{E_j \subseteq I \mid j = \overline{1, K}\}$, $\bigcup_j E_j = I$. При этом распределение уверенности внутри подмножеств фокальных элементов $E_j \subseteq I$ считается неизвестным. Полученные при этом значения меры и ее модальные свойства будут зависеть от выбранного множества $\{E_j \subseteq I \mid j = \overline{1, K}\}$.

Таким образом, существует противоречие. С одной стороны, надо задать меру на одноточечных подмножествах X, то есть определить плотность меры, а с другой стороны, это противоречит концепции нечеткой меры, которая не может быть локализована в одноточечных подмножествах в реальных условиях измерений, и надо использовать подмножества, где не уточняется распределение меры по точкам. Данное противоречие определяет актуальность приведенных исследований.

В отличие от поля действительных чисел R, поле p-адических чисел Q_p имеет строгую внутреннюю иерархическую структуру, что позволяет конструктивно описывать состояние и динамику скалярного поля в виде совокупности энергетических бассейнов [10], которые представляются образами p-адических шаров. Топологическая структура поля p-адических чисел Q_p обладает рядом свойств, которые позволяют весьма эффективно использовать образы p-адических шаров, для разрешения проблемы задания нечетких мер без необходимости определения функции плотности нечеткой меры. В то же время нахождение распределения нечеткой меры Сугэно на основе использования топологической структуры поля p-адических чисел приводит к необходимости определения нечеткой меры как функций p-адического аргумента, что требует использования алгебраической структуры поля p-адических чисел.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Учитывая результат теоремы Островского [11], существует единственная альтернатива полю действительных чисел R для области определения функции плотности нечеткой меры $g(x)$. Это поле p-адических чисел Q_p, получаемое в результате пополнения поля рациональных чисел Q по неархимедовой p-адической норме [7], удовлетворяющей условию сильного неравенства треугольника, p-адическое число $r \in Q_p$ отличное от нуля, имеет вид [12]:

$$r = \sum_{l=-m}^{+\infty} q_l \cdot p^l, \ q_l = 0, \ldots, p-1, \ q_{-m} \neq 0, \ m \in Z.$$

Бесконечная влево и конечная вправо последовательность целых чисел $q_l = 0, \ldots, p-1$ вида $r = (\ldots q_l \ldots q_1 q_0 q_{-1} \ldots q_{-m})_p$ называется канонической формой p-адического числа r. p-адические числа с нормой $|r|_p \leq 1$, для которых $l \geq 0$ [13] образуют кольцо целых p-адических чисел Z_p. Их каноническая запись имеет вид бесконечной влево последовательности $r = (\ldots q_l \ldots q_1 q_0)$ целых чисел q_l. Иногда для записи канонической формы целых p-адических чисел для удобства используют бесконечную вправо последовательность целых чисел q_l в виде $r = (\ldots q_l \ldots q_1 q_0)_p$ [14], которую мы в дальнейшем будем использовать.

В работе [13] было показано, что существует непрерывное отображение вида $\theta(r)$: $Q_p \to R_+$, где R_+ — множество неотрицательных действительных чисел, вида:

$$\theta(r) = \sum_{l=m}^{+\infty} q_l \cdot p^{-l-1},\ q_l = 0,\ldots,p-1,\ m \in Z.$$

Отображение $\theta(r)$ сюръективно, взаимно однозначно почти всюду, то есть сохраняет меру (переводит p-адическую меру Хаара в меру Лебега на полупрямой), непрерывно и гёльдерово с показателем 1 [15]. При этом непересекающиеся шары отображаются на интервалы, которые не пересекаются или имеют пересечение нулевой меры. Кроме того, образ целого p-адического числа $r \in Z_p$ принадлежит единичному интервалу вещественных чисел при отображении вида [16]:

$$\varphi(r) = p \cdot \theta(r) = \sum_{l=0}^{+\infty} q_l \cdot p^{-l},\ q_l = 0,\ldots,p-1.$$

В работе [10] было показано, что подмножество $A \subseteq I \subset R$ ограниченного числового множества с точностью до образа p-адического предела центра p-адического шара может быть представлено в виде образа некоторого множества p-адических шаров вида $U_\varepsilon(a) = \{r \in Z_p | \rho(r,a) \le \varepsilon\}$, где $\rho(r,a)$ — обобщенная метрика Кантора [17], $a \in I$ центр шара, $\varepsilon \in R_+$ его радиус,

$$r = \sum_{l=0}^{+\infty} q_l \cdot p^l, q_l = 0,\ldots,p-1 \text{ —}$$

целое p-адическое число. Все множество p-адических шаров в поле p-адических чисел Q_p образуют топологию со специфическими свойствами [12]. Кроме того, каждая точка шара $U_\varepsilon(a)$ является его центром, и в этом смысле их можно считать равными по важности, что в целом согласуется с концепцией теории нечеткой меры. Указанные топологические свойства Q_p, в частности соотношения между p-адическими шарами, упрощают определение множества фокальных элементов, как образов p-адических шаров для построения нечеткой меры на ограниченном числовом множестве и не требуют необходимости задания плотности нечеткой меры $g(x)$. В свою очередь, использование топологических свойств пространства p-адических чисел влечет за собой необходимость использования алгебраической структуры поля Q_p, так как нечеткие меры будут задаваться как функции p-адического аргумента [9]. В частности, как будет показано ниже, для равномерных аддитивных нечетких мер значение нечеткой меры определяется простейшей функцией сложения p-адических чисел.

Таким образом, в данном материале ставится задача определения нечеткой меры на ограниченном числовом множестве $I \subset R$ с использованием топологической и алгебраической структуры поля p-адических чисел Q_p без необходимости прямого задания плотности нечеткой меры.

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Описание структуры ограниченного числового множества на основе p-адических шаров. В работе [10] были предложены подход и алгоритм представления произвольного подмножества $A \subseteq I$ как образа множества p-адических шаров. При этом множество I представлялось в виде иерархической структуры подмножеств, которые удовлетворяют условиям:

$$\bigcup_{q_{l+1}=0}^{p-1} E_{q_0,\ldots q_{l+1}} = E_{q_0,\ldots q_l},$$

$$E_{q_0} = I, q_l = 0,\ldots,p-1, l = 0,\ldots,+\infty;$$

$$\forall i,j = 0,\ldots,p-1, Card(E_{q_0,\ldots,q_l,i}) = Card(E_{q_0,\ldots,q_l,j});$$

$$\forall i,j = 0,\ldots,p-1, E_{q_0,\ldots q_l,i} \cap E_{q_0,\ldots q_l,j} = \varnothing.$$

На рис. 1 представлен вариант разбиения множества I на подмножества $\{E_{q_0,\ldots q_l} | q_l = 0,\ldots,p-1\}$ при $p = 3$.

Следует отметить, что в качестве числа разбиения множества I можно взять произвольное составное число s, для которого можно будет сформулировать и доказать приведенные ниже утверждения. Однако в этом случае величина $|\cdot|_s$, построенная по аналогии с p-адической нормой [12], будет являться псевдо-

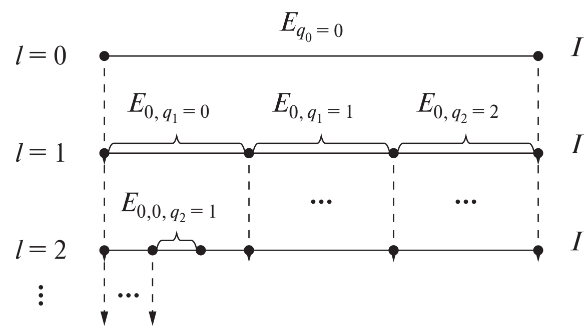

Рис. 1. Разбиение множества I при $p = 3$.

нормой. Тем не менее, как утверждается в работе [12], функция $d(x,y)=|x-y|_s$, будет являться метрикой, и можно рассмотреть пополнение поля Q по данной метрике. Данное пополнение позволяет определить кольцо Q_s, которое для составного числа s не будет являться полем. Однако в соответствии с теоремой Гензеля, доказательство которой представлено также в работе [12], если число s представляется как произведение различных простых чисел, то кольцо Q_s изоморфно прямой сумме р-адических полей $Q_s = Q_{p_1} \oplus \dots \oplus Q_{p_k}$, где $s = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Но в этом случае последовательности, соответствующие р-адическим числам с простыми числами $p_1, \ldots, p_k$, не обязательно сходятся по псевдонорме $|\cdot|_s$ (если только $s \neq p$) или даже могут быть не ограничены по ней, что осложняет выполнение операций в кольце Q_s. Данный факт существенно осложнит рассмотрение дальнейшего материала. Поэтому далее для большей наглядности определения нечеткой меры на р-адических шарах мы будем рассматривать разбиение множества I для случая простого числа p.

Любое подмножество $E_{q_0,\ldots q_l}$, полученное при разбиении множества I, может быть представлено как образ р-адического шара $U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_l})$ [10], где $\varepsilon = p^{-l}$ — радиус данного шара, $r_{q_0,\ldots q_l} = (q_0 \ldots q_l\,(p-1)\ldots)_p$ — целое р-адическое число в канонической форме, определяющее центр шара. Радиус и центр шара полностью определяются последовательностью $Seq_l(r_{q_0,\ldots\, q_l}) = (q_0, \ldots, q_l)$ индексов подмножества $E_{q_0,\ldots q_l}$. Далее последовательность $Seq_l(r)$ будем условно называть р-адической координатой шара $U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_l})$. Множество всех р-адических шаров обладает такими свойствами [12], что если есть U и V два р-адических шара в I, то они либо упорядочены по включению (или $U \subset V$, или $V \subset U$), либо не пересекаются ($U \cap V = \varnothing$); каждый шар в I одновременно открыт и замкнут, а любая точка шара является его центром.

В последующих рассуждениях будем использовать ряд понятий и обозначений, приведенных в работе [10]. Пусть $U_\alpha(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$ — р-адический шар с радиусом $\alpha = p^{1-l}$, а $\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}) = \{U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots\, q_l}),\ |q_l = 0, \ldots, p-1,\ \varepsilon = p^{-l}\}$ — множество шаров мощности $Card(\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})) = p$. Тогда шар $U_\alpha(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$ является минимальным покрывающим шаром для множества $\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$, а также каждого из р-адических шаров данного множества, что обозначается как $\forall U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_l}), U_\alpha(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}) = Cov_\alpha(U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_l}))$. При этом шары из множества $\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$ являются равными по покрытию $U_\alpha(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$, что обозначается как $\forall i,j = 0,\ldots, p-1, U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_{l-1},i}) \equiv U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_{l-1},j})\{Cov|U_\alpha(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})\}$. Шары из множества $\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$ неотличимы с точки зрения минимального покрытия $U_\alpha(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$. Исходя из этого, можем предположить, что распределение уверенности на множестве равных по покрытию шаров является равномерным.

Равномерная нечеткая мера на р-адических шарах. Равномерной нечеткой мерой называется нечеткая мера, для которой $\forall x \in I$ плотность меры постоянна $g(x) = \text{const} \in [0,1]$. Для построения равномерной нечеткой меры будем учитывать несколько замечаний. Во-первых, точки $x \in I \subset R$ являются образами целых р-адических чисел и в них нет возможности определить плотность нечеткой меры $g(x)$: $I \to [0,1]$. Во-вторых, множество всех возможных р-адических шаров вида $U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_l})$, заданных на I, определяет иерархическую структуру подмножеств данного множества [10]. В-третьих, будем считать, что известна модальность нечеткой меры $g(\cdot)$: $2^I \to [0,1]$, заданной на множестве I, а соответственно нам известен параметр λ данной нечеткой меры. В-четвертых, учитывая выше сказанное, будем полагать, что нечеткая мера на любом множестве шаров, равных по минимальному покрытию, имеет равномерное распределение плотности.

Для определения нечеткой меры на множестве I мы не можем задать функцию плотности меры в классическом варианте. В то же время на множестве I мы можем определить значение меры для образов всех р-адических шаров $U_\varepsilon(r_{q_0,\ldots q_l})$. Для этого воспользуемся свойством [2] ограниченности нечеткой меры $g(I) = 1$.

<u>Утверждение 1</u>. Нечеткая мера $g(r_{q_0,\ldots,q_l})$ подмножества $E_{q_0,\ldots q_l} \subset I$, являющегося образом р-адического шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l})$ для равномерной нечеткой меры $g(\cdot)$: $2^I \to [0,1]$ фиксированным параметром λ, если таковая существует, определяется соотношением:

$$g(r_{q_0,\ldots,q_l}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{(1+\lambda)^{1/p^l} - 1\right\},\ l = 0,\ldots,+\infty.$$

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим уровень $l = 1$ разбиения множества I на p подмножеств $E_{q_0,q_1}, q_1 = 0,\ldots, p-1$. В этом случае р-адический шар $U_1(1)$, образом которого является все множество I, является минимальным покрытием для множества $\mathcal{U}(r_{q_0})$ равных по данному покрытию шаров $U_{p^{-1}}(r_{q_0,q_1})$, $Card(\mathcal{U}(r_{q_0})) = p, r_{q_0} = (0,(p-1),\ldots)_p, \varphi(r_{q_0}) = 1.$ По условию нормировки $g(I) = 1$ должно выполняться условие:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \left\{\prod_{q_1=0}^{p-1}\left(1 + \lambda \cdot g(r_{q_0,q_1})\right) - 1\right\} = 1,$$

где $\forall q_1, g(r_{q_0,q_1}) = \text{const} \in [0,1]$. Тогда имеем:

$$g(r_{q_0,q_1}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{(1+\lambda)^{\frac{1}{p}} - 1\right\}.$$

Для уровня разбиения $l = 2$ должно выполняться условие:

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \left\{\left(1 + \lambda \cdot g\left(r_{q_0,q_1,q_2}\right)\right)^p - 1\right\} =$$

$$= g\left(r_{q_0,q_1}\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{(1+\lambda)^{\frac{1}{p}} - 1\right\}.$$

Отсюда нечеткая мера $\forall q_2, g(r_{q_0,q_1,q_2}) = \text{const} \in [0,1]$ для образа p-адического шара $U_{p^{-2}}(r_{q_0,q_1,q_2})$ на уровне $l = 2$ будет определяться соотношением:

$$g(r_{q_0,q_1,q_2}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{(1+\lambda)^{1/p^2} - 1\right\}.$$

Выполняя аналогичную процедуру для произвольного $l = 0, \dots, +\infty$ мера для образа p-адического шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\dots,q_l})$ будет определяться соотношением:

$$g(r_{q_0,\dots,q_l}) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{(1+\lambda)^{1/p^l} - 1\right\},$$

где при фиксированных $q_0, \dots, q_{l-1}$ и $\forall q_l = 0, \dots, p-1, g(r_{q_0,\dots,q_l}) = \text{const} \in [0,1]$ ■.

Далее меру $g(r_{q_0,\dots,q_l})$ будем называть мерой p-адического шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\dots q_l})$, понимая, что это мера подмножества $E_{q_0,\dots q_l} \subseteq I$, являющегося образом данного шара.

Следствие. Мера подмножества множества I, являющегося образом p-адического шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\dots q_l})$ для равномерной меры вероятности $Pr(\cdot)\colon 2^I \to [0.1]$, определяется радиусом p-адического шара $Pr(r_{q_0,\dots,q_l}) = p^{-l}$.

Доказательство. $\forall U_{p^{1-l}}(r_{q_0,\dots,q_{l-1}}), Card(U(r_{q_0,\dots q_{l-1}})) = p$. $Pr(I) = Pr(r_{q_0}) = 1$. Тогда для равномерной меры имеем:

$$Pr(r_{q_0,\dots,q_l}) = \frac{1}{p} \cdot Pr(r_{q_0,\dots,q_{l-1}}) =$$

$$= \frac{1}{p} \cdot \left\{\frac{1}{p} \cdot Pr(r_{q_0,\dots,q_{l-2}})\right\} = \dots =$$

$$= \frac{1}{p^l} \cdot Pr(r_{q_0}) = \frac{1}{p^l} \cdot 1 = p^{-l}. \ ■$$

Определение равномерной меры для множества p-адических шаров на любом уровне $l = 0, \dots, +\infty$ полностью задает нечеткую меру на I. Однако при этом нет необходимости задавать плотность нечеткой меры, которая привязана к точкам множества I. Мера p-адического шара определяется параметром меры λ (ее модальностью) и значением параметра разбиения p. Следует отметить, что наши рассуждения исходили из того, что p является простым числом. Однако приведенные результаты допустимы и для более общего случая, когда $p \in N$, где N — множество натуральных чисел [14]. В дальнейшем для простоты изложения мы будем использовать понятие p-адического числа, понимая, что в общем случае возможно использование произвольного $p \in N$. Заметим, что значение равномерной меры для p-адического шара зависит от p^l. В этом смысле наблюдается сходство построения данной меры с построением p-адических чисел [18].

Рассмотрим порядок расчета равномерной нечеткой меры на p-адических шарах для произвольного подмножества ограниченного числового множества I. Подмножество $A \subseteq I$ с точностью до образа p-адического предела центра p-адического шара является образом множества p-адических шаров $U(A) = \{U_{\varepsilon_i}(r_i) | i = \overline{1, N_A}\}$ [10]. На практике для подмножества $A \subseteq I$ рассматривается конечное множество p-адических шаров $U_{\varepsilon_{apr}}(A) = \{U_{\varepsilon_i}(r_i) | i = \overline{1, N_A}, U_{\varepsilon_i}(r_i) \in U(A),\ \varepsilon_i \ge \varepsilon_{apr} \in [0,1]\} \subseteq U(A)$, которое аппроксимирует множество $A \subseteq I$ с точностью ε_{apr}. В этом случае p-адические шары из $U_{\varepsilon_{apr}}(A)$ минимального радиуса будут лежать на уровне $L = -\log_p \min\limits_{i=\overline{1,N_A}} \varepsilon_i, \varepsilon_i \ge \varepsilon_{apr}$. Пусть $U_l(A) \subseteq U(A)$ включает все шары $U_{\varepsilon_i}(r_i)$, для которых $\varepsilon_i = p^{-l}$, $l = 0, \dots, +\infty$, и пусть $Card(U_l(A)) = a_l \in N$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Мера подмножества $A \subseteq I$ для равномерной нечеткой меры на p-адических шарах $g(\cdot)\colon 2^I \to [0,1]$ определяется соотношением:

$$g(A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{(1+\lambda)^{r^A} - 1\right\},$$

где $r^A = \sum\limits_{j=-L}^{+\infty} (q_j \cdot p^j)$ — результирующее p-адическое число, полученное по правилу сложения p-адических чисел r_l^A для всех уровней разложения $l \le L$, $L \in N$, где

$$r_l^A = \sum_{j=-L}^{+\infty} (q_j \cdot p^j),\ b_j^l = b_n^l,\ j = n - l,$$

а b_n^l — коэффициенты в позиционной p-адической системе счисления для числа $a_l = Card(U_l(A))$.

Доказательство. В соответствии с [10] любое подмножество $A \subseteq I$ однозначно определяется множеством p-адических шаров $U(A)$, имеющих образом интервалы, которые либо не пересекаются, либо имеют пересечение нулевой меры. В этом случае мера подмножества $A \subseteq I$ может быть определена соотношением:

$$g(A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \prod_{i=1}^{N_A} (1 + \lambda \cdot g_i) - 1 \right\},$$

где g_i — мера шара $U_{\varepsilon_i}(r_i) \in U(A)$. Для равномерной нечеткой меры справедливо соотношение:

$$g(A) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \prod_{l=0}^{+\infty} (1 + \lambda \cdot g_l)^{a_l} - 1 \right\},$$

где g_l — мера p-адических шаров $U_{\varepsilon_i}(r_i)$ с радиусом $\varepsilon_i = p^{-l}$, $l = 0, \ldots, +\infty$, $a_l = Card(U_l(A))$. Исходя из построения равномерной нечеткой меры на p-адических шарах (Утверждение 1), имеем $(1 + \lambda \cdot g_l)^p = (1 + \lambda \cdot g_{l-1})$. Натуральное число a_l может быть представлено [18] в виде:

$$a_l = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n^l \cdot p^n), \ b_n^l, \ n \in N$$

или в позиционной p-адической системе счисления в виде $a_l = (b_0^l b_1^l b_2^l \ldots b_n^l \ldots)_p$.

Исходя из Утверждения 1, мера g_l определяется соотношением:

$$g_l = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ (1 + \lambda)^{1/p^l} - 1 \right\}.$$

Тогда, подставив это выражение, получим:

$$(1 + \lambda \cdot g_l)^{\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n^l \cdot p^n)} =$$

$$= \left(1 + \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ (1 + \lambda)^{\frac{1}{p^l}} - 1 \right\} \right)^{\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n^l \cdot p^n)} =$$

$$= (1 + \lambda)^{p^{-l} \sum_{j=-l}^{+\infty} \left(b_n^l \cdot p^j \right)} =$$

$$= (1 + \lambda)^{\sum_{n=0}^{+\infty} (b_n^l \cdot p^{n-l})} = (1 + \lambda)^{\sum_{n=0}^{+\infty} (b_j^l \cdot p^j)},$$

где $b_j^l = b_n^l$, $j = n - l$. Ряд $\sum_{j=-l}^{+\infty} (b_j^l \cdot p^j) = r_l^A$ является p-адическим числом [7]. Тогда можем записать:

$$g(a) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left\{ \prod_{l=0}^{+\infty} (1 + \lambda \cdot g_l)^{a_l} - 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left\{ (1 + \lambda)^{\sum_{l=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{j=-l}^{+\infty} \left(b_j^0 \cdot p^j \right) \right\}} - 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left\{ (1 + \lambda)^{\sum_{j=0}^{+\infty} \left(b_j^0 \cdot p^j \right) + \sum_{j=-1}^{+\infty} \left(b_j^1 \cdot p^j \right) + \sum_{j=-2}^{+\infty} \left(b_j^2 \cdot p^j \right) \cdots} - 1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left\{ (1 + \lambda)^{r_0^A \oplus r_1^A \oplus r_2^A \oplus \cdots} - 1 \right\} = \frac{1}{\lambda} \left\{ (1 + \lambda)^{r^A} - 1 \right\},$$

где $\bigoplus_{l \le L} r_l^A = r^A$ — результирующее p-адическое число, полученное по правилу сложения p-адических чисел r_l^A для всех уровней $l \le L$, $L \in N$. Если для подмножества $A \subseteq I$ рассматривается конечное множество p-адических шаров $U_{\varepsilon_{apr}}(A) \subseteq U(A)$, которое аппроксимирует множество $A \subseteq I$ с точностью ε_{apr}, то результатом p-адического сложения L p-адических чисел r_l^A будет p-адическое число $r^A = \sum_{j=-L}^{+\infty} (q_j \cdot p^j)$, где $L = -\log_p \min_{i=1,N_A} \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \ge \varepsilon_{apr}$. Исходя из свойства ограниченности нечеткой меры $g(A) \le 1$ следует, что $\sum_{j=-L}^{+\infty} (q_j \cdot p^j) \le 1$, а следовательно, $j \le 0$ и $q_0 \in \{0,1\}$. Тогда можем записать

$$r^A = \begin{cases} \sum_{j=-L}^{-1} (q_j \cdot p^j), \ q_0 = 0; \\ 1, \ q_0 = 1, \end{cases}$$

где $\sum_{j=-L}^{-1} (q_j \cdot p^j)$ является дробным p-адическим числом [13].

Следствие. Мера подмножества $A \subseteq I$ для равномерной нечеткой меры вероятности на p-адических шарах $Pr(\cdot)\colon 2^I \to [0,1]$ определяется пределом по p-адической норме последовательности p-адического числа $r^A = \sum_{j=-L}^{+\infty} (q_j \cdot p^j)$, $q_l \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, где q_l — коэффициенты канонического разложения результирующего p-адического числа r^A, полученного по правилу сложения p-адических чисел r_l^A для всех уровней разложения $l \le L$, $L \in N$, где $r_l^A = \sum_{j=-l}^{+\infty} (b_j^l \cdot p^j)$, $b_j^l = b_n^l$, $j = n - l$, а b_n^l — коэффициенты в позиционной p-адической системе счисления для числа $a_l = Card(U_l(A))$.

Доказательство. Мера вероятности шара $U_{\varepsilon_i}(r_i) \in U_l(A)$ равна p^{-l}. Шары из множества $U(A)$ не пересекаются, поэтому имеем:

$$Pr(U_l(A)) = \sum_{U_{\varepsilon_i}(r_i) \in U_l(A)} Pr(U_{\varepsilon_i}(r_i)) = \frac{a_l}{p^l} =$$

$$= p^{-l} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(b_n^l \cdot p^n \right) = \sum_{j=-l}^{+\infty} \left(b_j^l \cdot p^j \right) = r_l^A,$$

где $b_j^l = b_n^l$, $j = n - l$. Множества $U_l(A) \subseteq U(A)$ для любых уровней l также между собой не пересекаются. Поэтому можем записать:

$$Pr(U(A)) = \sum_{l=0}^{+\infty} Pr(U_l(A)) =$$
$$= r_0^A \oplus r_1^A \oplus r_2^A \oplus \cdots = r^A = \sum_{j=-L}^{+\infty} \left(q_j \cdot p^j\right),$$

где q_l — коэффициенты канонического разложения результирующего p-адического числа r^A, полученного по правилу сложения p-адических чисел r_l^A для всех уровней разложения $l \le L,\ L \in N$. Мера $Pr(U(A))$ равна пределу по p-адической норме последовательности, представляющей p-адическое число r^A. ■

Пример 1. Рассмотрим пример расчета равномерной p-адической меры (при $p = 3$) для подмножества $A \subseteq I$, которое представлено множеством p-адических шаров

$$U(A) = \left\{U_{\frac{1}{3}}(r_{0,1}), U_{\frac{1}{9}}(r_{0,0,1}), U_{\frac{1}{9}}(r_{0,0,2}), U_{\frac{1}{9}}(r_{0,2,0})\right\},$$

где $r_{0,1} = (0122\ldots)_3$, $r_{0,0,1} = (0012\ldots)_3$, $r_{0,0,2} = (0022\ldots)_3$, $r_{0,2,0} = (0202\ldots)_3$. Пусть $\lambda = 0.7$. В соответствии с Утверждением 1 меры p-адических шаров из множества $U(A)$ будут $g(r_{0,1}) \cong 0.2764$, $g(r_{0,0,1}) = g(r_{0,0,2}) = g(r_{0,2,0}) \cong 0.0868$. При этом $g(r_0) = 1$. Множество $U(A)$ по уровням l распределяется в виде:

$$U_0(A) = \varnothing, U_1(A) = \left\{U_{\frac{1}{3}}(r_{0,1})\right\}, U_2(A) =$$
$$= \left\{U_{\frac{1}{9}}(r_{0,0,1}), U_{\frac{1}{9}}(r_{0,0,2}), U_{\frac{1}{9}}(r_{0,2,0})\right\}.$$

Тогда, $a_0 = Card(U_0(A)) = 0$, $a_1 = 1$, $a_3 = 3$. И, следовательно, $r_0^A = 0$, $r_1^A = (0100\ldots)_3$, $r_2^A = (0100\ldots)_3$. Выполнив сложение $r_l^A, l = 0,1,2$ по правилу сложения p-адических чисел, получим $r^A = (0200\ldots)_3$. Пределом последовательности будет $2 \cdot 3^{-1} = 2/3$. Тогда мера подмножества $A \subseteq I$ в соответствии с Утверждением 2 будет

$$g(A) = \frac{1}{0.7} \cdot \left\{(1 + 0.7)^{\frac{2}{3}} - 1\right\} = 0.6063.$$

В данном примере при фиксированном параметре λ равномерная p-адическая мера совпадает с обычной равномерной нечеткой мерой, что полностью подтверждает правомочность Утверждения 1.

Неоднородная нечеткая мера на p-адических шарах. Использование равномерной нечеткой меры на p-адических шарах на практике затруднительно. Прежде всего, это связано с тем, что данная мера не позволяет учитывать различные распределения неопределенности на множестве I. Это приводит к большим ошибкам при моделировании неопределенности в практических задачах. Кроме этого, при увеличении уровня l мера p-адических шаров $g(r_{q_0,\ldots,q_l})$ убывает экспоненциально. Это серьезно затрудняет ее идентификацию на основе существующих методов [19]. Опыт использования нечетких мер при моделировании в условиях неопределенности показывает, что для каждого множества равных по покрытию p-адических шаров $\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})$ мера должна иметь возможность принимать значения во всем интервале [0,1]. Это позволяет не привязываться к изначально заданному уровню $l = 0$, обеспечить возможность идентификации меры известными методами, а также практичность ее использования.

Ранее мы рассматривали равномерную нечеткую меру на p-адических шарах, для которой $\forall \mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}),\ l = 0,\ldots,+\infty, \forall q_l, g(r_{q_0,\ldots,q_l}) = \text{const}$, а параметр $\forall l, \lambda = \text{const}$. Далее определим неоднородную нечеткую меру на p-адических шарах. Сначала рассмотрим случай, когда параметр λ зависит только от уровня $\forall l, \lambda_l \in [-1,+\infty[,\ \lambda_l = \text{var}$, а мера равных по фиксированному покрытию шаров $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l})$ равномерная.

Утверждение 3. Нечеткая мера подмножества множества I, являющегося образом p-адического шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l})$, для неравномерной по уровням l нечеткой меры на p-адических шарах с изменяющимся по уровням параметром λ_l определяется соотношением:

$$\begin{cases} g(r_{q_0,\ldots,q_l}) = \dfrac{1}{\lambda_l} \cdot \left\{(1 + f_l)^{1/p} - 1\right\}; \\ f_l = \dfrac{\lambda_l}{\lambda_{l-1}} \cdot \left((1 + f_{l-1})^{1/p} - 1\right) = \lambda_l \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}), \end{cases}$$

где $l = 0,\ldots,+\infty$, $\lambda_l \in [-1,+\infty[$, $g(r_{q_0,\ldots,q_l}) \in [0,1]$, $g(r_{q_0}) = 1$, $f_1 = \lambda_1$.

Доказательство. Сохраним ранее описанную процедуру построения нечеткой меры на p-адических шарах. Тогда на уровне $l = 1$ равномерная нечеткая мера p-адического шара будет:

$$g(r_{q_0,q_1}) = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \left\{(1 + \lambda_1)^{\frac{1}{p}} - 1\right\}.$$

Для согласованности меры на $l = 2$ должно выполняться условие:

$$\frac{1}{\lambda_2} \cdot \left\{(1 + \lambda_2 \cdot g(r_{q_0,q_1,q_2}))^p - 1\right\} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_1} \cdot \left\{(1 + \lambda_1)^{\frac{1}{p}} - 1\right\}.$$

Отсюда значение меры шара $U_{p^{-2}}(r_{q_0,q_1,q_2})$ на уровне $l = 2$ будет:

$$g(r_{q_0,q_1,q_2}) = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \left\{ \left[\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \left((1+\lambda_1)^{\frac{1}{p}} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{1}{p}} - 1 \right\}.$$

Введем в рассмотрение вспомогательную функцию f_l вида:

$$f_l = \begin{cases} \lambda_1,\ l = 1; \\ \dfrac{\lambda_l}{\lambda_{l-1}} \cdot \left((1 + f_{l-1})^{1/p} - 1 \right),\ l > 1. \end{cases}$$

Тогда значение меры g_2 будет определяться соотношением:

$$g(r_{q_0,q_1,q_2}) = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \left\{ (1 + f_2)^{\frac{1}{p}} - 1 \right\}.$$

Повторим процедуру для уровня $l = 3$. Тогда:

$$g(r_{q_0,q_1,q_2,q_3}) = \frac{1}{\lambda_3} \times$$
$$\times \left\{ \left[\underbrace{\frac{\lambda_3}{\lambda_2} \cdot ((1 + f_2)^{\frac{1}{p}} - 1)}_{f_3} + 1 \right]^{\frac{1}{p}} - 1 \right\} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_3} \cdot \left\{ (1 + f_3)^{\frac{1}{p}} - 1 \right\}.$$

Таким образом, неравномерная по уровням l нечеткая мера на p-адических шарах с изменяющимся параметром λ_l для p-адического шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l})$ определяется системой рекуррентных уравнений:

$$\begin{cases} g(r_{q_0,\ldots,q_l}) = \dfrac{1}{\lambda_l} \cdot \left\{ (1 + f_l)^{\frac{1}{p}} - 1 \right\}; \\ f_l = \dfrac{\lambda_l}{\lambda_{l-1}} \cdot \left((1 + f_{l-1})^{\frac{1}{p}} - 1 \right) = \lambda_l \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}), \end{cases}$$

где $l = 0,\ldots,+\infty$, $\lambda_l \in [-1,+\infty[$, $g(r_{q_0,\ldots,q_l}) \in [0,1]$, $g(r_{q_0}) = 1$, $f_1 = \lambda_1$. ■

В общем случае для фиксированного уровня l нечеткая мера шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l})$ будет зависеть от последовательности $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \in [-1,+\infty[$. В этом случае $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ и вспомогательная функция $f_l(r_{q_0,\ldots,q_l})$ будут функциями p-адической координаты $Seq_{l-1}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = (q_0,\ldots,q_{l-1})$. По мере увеличения уровня l мера $g(r_{q_0,\ldots,q_l})$ шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l})$ уменьшается экспоненциально, что определяется ограничением $g(\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})) = g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$. Однако связь между мерами на соседних уровнях может и не удовлетворять данному ограничению. В этом случае для обеспечения согласованности меры для всех шаров $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l})$ введем в рассмотрение функцию проектора (или просто проектор) $\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ между уровнями l и $l-1$ для конкретной p-адической координаты $(q_0,\ldots,q_{l-1})$ так, чтобы выполнялось условие:

$$g(\mathcal{U}(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})) =$$
$$= \textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \in [0,1].$$

Тогда, учитывая доказательство Утверждения 3, неравномерная по уровням l нечеткая мера на p-адических шарах для фиксированного шара $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l})$ будет определяться системой рекуррентных уравнений вида:

$$\begin{cases} g(r_{q_0,\ldots,q_l}) = \dfrac{1}{\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_l})} \cdot \left\{ (1 + f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}))^{\frac{1}{p}} - 1 \right\}; \\ f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot \textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}), \end{cases}$$

где $l = 0,\ldots,+\infty$, $\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \in [0,1]$,
$g(r_{q_0}) = 1$, $f_1(r_{q_0}) = \lambda_1(r_{q_0})$, $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \in [-1,+\infty[$.

Рассмотрим проектор $\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$. Если $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \to -1$, то мы имеем меру правдоподобия (возможности) и в этом случае $g(r_{q_0,\ldots,q_l}) \to 1$. При этом должно выполняться условие $\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \geq g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ и, следовательно, $\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \geq 1$. Аналогично, если $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \to +\infty$, то мы имеем меру доверия (необходимости) и $g(r_{q_0,\ldots,q_l}) \to 0$. В этом случае $\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \in [0,1]$. Таким образом, проектор $\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ является функцией, зависящей от $g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ и $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$, для которой выполняются вышеописанные условия. Вариантом функции проектора может быть функция:

$$\textbf{\textit{Proj}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})^{\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})}.$$

Тогда функция $f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ примет вид:

$$f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})^{1+\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})}.$$

Определим зависимости для расчета неоднородной нечеткой меры на p-адических шарах для подмножества $A \subseteq I$, которое является образом множества p-адических шаров $U(A) = \{U_{\varepsilon_i}(r_i) | i = \overline{1, N_A}\}$ [10]. Пусть $CS(U_{\varepsilon_i}(r_i))$ — множество всех p-адических покрытий $Cov_\alpha(U_{\varepsilon_i}(r_i))$ для шара $U_{\varepsilon_i}(r_i)$. Тогда множество всех покрытий, соответствующих $U(A)$, будет задавать для множества $A \subseteq I$ p-адический ландшафт $LS(U(A)) = \{CS(U_{\varepsilon_i}(r_i)) | U_{\varepsilon_i}(r_i) \in U(A)\}$. Исходя из этого, для определения меры подмножества $A \subseteq I$ на практике целесообразно знать меры всех покрытий из $LS(U(A))$. Мера для покрытия $U_1(1)$, соответствующего всему множеству I, будет определять нечеткую меру подмножества $A \subseteq I$

в классическом понимании. Следует отметить, что в общем случае мера “полного” шара $U_{p^{1-l}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ и мера покрытия в виде данного шара $Cov_{p^{1-l}}(U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l})) = U_{p^{1-l}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ не совпадают.

Обозначим меру покрытия для шаров $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l})$ в виде $g(Cov(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}))$. В общем случае выполняется условие $g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \geq g(Cov(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}))$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. Значение неравномерной нечеткой меры на p-адических шарах покрытия $Cov_{p^{1-l}}(U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l})) \in LS(U(A))$ определяется соотношениями:

$$\begin{cases} g(Cov(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})) = \dfrac{1}{\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})} \times \\ \times \left\{ F_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot (1 + f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}))^{\frac{a_l(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})}{p}} - 1 \right\}; \\ f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})^{1+\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})}; \\ F_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = \prod_{q_l \notin A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})} (1 + g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l})) \times \\ \times \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})), \end{cases}$$

где $r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}$ — p-адическое число, соответствующее центру шара покрытия, $A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ — множество индексов q_l p-адических чисел $r_{q_0,\ldots,q_l}$ для центров шаров равных по покрытию $U_{p^{1-l}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ и входящих в $U(A)$, $Card(A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})) = a_l(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}) \in \in \{0,\ldots,p-1\}$, $g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ — мера p-адического шара $U_{p^{1-l}}(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$, рассчитанная для последовательности $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$.

Доказательство. Мера покрытия $Cov_{p^{1-l}}(U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l}))$ на уровне $l-1$ определяется по формуле:

$$g(Cov(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})) = \frac{1}{\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})} \times$$
$$\times \left\{ \prod_{q_l \in \{0,\ldots,p-1\}} \left(1 + g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l}))\, \lambda_l(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})\right) - 1 \right\}.$$

Все множество индексов q_l на уровне l делится на два подмножества $A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$, для p-адических шаров $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l}) \in U(A)$, и $\{0,\ldots,p-1\} \setminus A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$, для $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l}) \notin U(A)$. Тогда на уровне l для $q_l \in A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ мера $g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l}))$ будет определяться соотношением:

$$\begin{cases} g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l})) = g(r_{q_0,\ldots,q_l}) = \dfrac{1}{\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})} \times \\ \times \left\{ (1 + f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}))^{1/p} - 1 \right\}; \\ f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \cdot g(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})^{1+\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})}. \end{cases}$$

Отсюда:

$$\prod_{q_l \in A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})} \left(1 + g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l})) \cdot \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})\right) =$$
$$= \left(1 + g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l})) \cdot \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})\right)^{a_l(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})} =$$
$$= \left\{ 1 + \left[\frac{1}{\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})} \cdot \left\{ (1 + f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}))^{\frac{1}{p}} - 1 \right\} \right] \times \right.$$
$$\left. \times \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) \right\}^{a_l(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})} = \left(1 + f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})\right)^{\frac{a_l(r_{q_0,\ldots q_{l-1}})}{p}}.$$

Для шаров $U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots,q_l}) \notin U(A)$, $q_l \notin A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ и $g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l})) \leq g(r_{q_0,\ldots,q_l})$. Для них определим вспомогательную функцию в виде:

$$F_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) =$$
$$= \prod_{q_l \notin A_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})} \left(1 + g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l})) \cdot \lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})\right).$$

Подставив соответствующие выражения для $g(Cov(r_{q_0,\ldots q_l}))$ и $F_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ для определения меры $g(Cov(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}))$, мы получим соотношение, заданное Утверждением 3. ■

Интересно заметить, что функции $f_l(\cdot)$ и $F_l(\cdot)$ выполняют роли уточняющей и агрегирующей функций соответственно. Уточняющая функция позволяет по заданным параметрам λ определить меры соответствующих p-адических шаров, а агрегирующая функция обеспечивает получение значения меры любого покрытия, входящего в p-адический ландшафт $LS(U(A))$ для множества $A \subseteq I$. Исходя из этого, практический алгоритм расчета неравномерной меры на p-адических шарах для данного подмножества имеет следующий вид.

Алгоритм.

Шаг 1. Определение исходных данных. Для задания меры на p-адических шарах мы должны иметь полную функцию $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ для всех p-адических шаров на множестве I. Подмножество $A \subseteq I$ рассматривается как образ множества p-адических шаров $U(A)$ в соответствии с подходом, представленным в работе [10].

Шаг 2. Определение меры p-адических шаров. Меры $g(r_{q_0,\ldots,q_l})$ рассчитываются на основании функции неравномерной меры на p-адических шарах Утверждения 3. Для этого определяются функции $f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$.

Шаг 3. Нахождение начального условия функции агрегирования. Определяем максимальный уровень l, на котором определены p-адические шары минимального радиуса из множества $U(A)$ и определяем $F_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}) = 1$.

Шаг 4. Расчет меры подмножества. Рассчитываем в соответствии с формулой Утверждения 4 меры покрытий $g(Cov(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}))$. Принимаем $g(Cov(r_{q_0})) = g(A)$.

Пример 2. Рассмотрим расчет неравномерной нечеткой меры на p-адических шарах для подмножества $A \subseteq I$ из Примера 1. Для расчета меры подмножества $A \subseteq I$ нам необходимо рассчитать меры покрытий $Cov_1(U_{p^{-1}}(r_{0,q_1}))$, $Cov_{p^{-1}}(U_{p^{-2}}(r_{0,0,q_2}))$, $Cov_{p^{-1}}(U_{p^{-2}}(r_{0,2,q_2}))$. При этом $g(Cov(r_0))$ для покрытия $Cov_1(U_{p^{-1}}(r_{0,q_1}))$ будет определять меру $g(A)$ подмножества $A \subseteq I$. Пусть мера на p-адических шарах задана функцией $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$, зависящей от p-адической координаты. Пусть значения данной функции для p-адических координат, необходимых нам для расчета покрытий, будут иметь значения $\lambda_1(r_0) = 0.7$, $\lambda_2(r_{0,0}) = -0.8$, $\lambda_2(r_{0,2}) = 1$. Тогда значения уточняющей функции $f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ для необходимых покрытий в соответствии с Утверждением 4 будут иметь значения: $f_2(r_{0,0}) = -0.6186$, $f_2(r_{0,2}) = 0.0764$, $f_1(r_0) = 0.7$. Соответственно меры шаров с заданными p-адическими координатами: $g(r_{0,0,1}) = g(r_{0,0,2}) = 0.3435$, $g(r_{0,2,0}) = 0.0248$, $g(r_{0,1}) = 0.2764$.

Для расчета меры покрытий в соответствии с Утверждением 4 рассчитываем агрегирующую функцию $F_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$. Для необходимых покрытий данная функция примет значения $F_2(r_{0,0}) = F_2(r_{0,2}) = 1$, $F_1(r_0) = 1.4394$. Тогда меры рассчитываемых покрытий будут: $g(Cov(r_{0,0})) = 0.5925$, $g(Cov(r_{0,2})) = 0.0248$, $g(Cov(r_0)) = 0.802$. Таким образом, для заданной неоднородной меры на p-адических шарах мера подмножества $A \subseteq I$ будет иметь значение $g(A) = g(Cov(r_0)) = 0.802$. Получение данного результата может быть представлено таблицей 1.

При изменении функции $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ мера примет другое значение. Сама же функция параметра λ зависит от p-адической координаты покрывающего шара. Таким образом, мера на p-адических шарах может учитывать структуру множества I и формировать на нем пространство с нечеткой мерой, имеющей переменную модальность. При этом необходимость непосредственного задания функции плотности нечеткой меры отсутствует.

Одним из вариантов задания функции $\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$ может быть рассмотрена функция, определяемая p-адической координатой $Seq_{l-1}(r) = (q_0,\ldots q_{l-1})$:

$$\lambda_l\left(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}}\right) = \left[\mu\left(\rho\left(Seq_{l-1}(r)\right)\right)\right]^{-2} \times \\ \times \left\{1 - 2 \cdot \mu\left(\rho\left(Seq_{l-1}(r)\right)\right)\right\},$$

где
$$\rho(Seq_{l-1}(r)) = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{q_j}{p^j},$$

$q_j \in \{0,\ldots,p-1\}$, $\mu(\cdot)$: $[0,1] \to [0,1]$ — функция в единичном квадрате. В простейшем случае $\mu(\cdot)$ является тождественной функцией вида $\mu(x) = x$.

4. ВЫВОДЫ

Предложенная нечеткая мера на p-адических шарах полностью удовлетворяет свойствам нечеткой меры, что вытекает из подстановки исходных данных свойств ограниченности, монотонности и непрерывности в соотношениях Утверждения 4. Данная мера учитывает структуру ограниченного числового множества в виде образов p-адических шаров и не требует задания точек данного множества, а соответственно и плотности нечеткой меры. Нечеткая мера на p-адических шарах полностью определяется лишь функцией параметра нормировки λ (модальностью нечеткой меры), которая однозначно задается p-адической координатой покрывающего шара. Таким образом нечеткая мера, предложенная в работе, является вещественнозначной функцией p-адического аргумента. Использование проектора при построении нечеткой меры снимает проблему определения нулевого уровня, позволяет обеспечить согласованность нечеткой меры на различных уровнях с учетом относительной нормировки в каждом покрывающем p-адическом шаре. Использование неравномерной нечеткой меры на p-адических шарах позволяет моделировать пространства с нестационарной нечеткой мерой, в которой параметр λ

Таблица 1. Расчет неравномерной p-адической меры

l	$U_{p^{-l}}(r_{q_0,\ldots q_l})$	$\lambda_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$	$f_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$	$g(r_{q_0,\ldots,q_l})$	$F_l(r_{q_0,\ldots,q_{l-1}})$	$g(Cov(r_{q_0,\ldots q_{l-1}}))$
1	$U_{p^{-1}}(r_{0,1})$	0.7	0.7	0.2764	1.4394	**0.802**
2	$U_{p^{-2}}(r_{0,0,1})$	–0.8	–0.6186	0.3435	1	0.5925
	$U_{p^{-2}}(r_{0,0,2})$	–0.8	–0.6186	0.3435	1	0.5925
	$U_{p^{-2}}(r_{0,2,0})$	1	0.0764	0.0248	1	0.0248

зависит от p-адической координаты. Применение данной меры открывает возможность моделирования динамики сложных ландшафтов для различных скалярных полей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Becker O.M., Karplus M.* The topology of multidimensional protein energy surfaces: theory and application to peptide structure and kinetics // Journal of Chemical Physics. 1997. V. 106. P. 1495–1517.
2. *Grabisch M., Murofushi T., Sugeno M.* Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications. Berlin, Germany, Physica-Verlag GmbH & Co, 2000, 477 p., ISBN10 3790812587
3. *Веккер Л.М.* Психика и реальность: единая теория психических процессов. — М.: Смысл, 1998. 685 с. Режим доступа: https://vshp.pro/wp-content/uploads/2020/03/Vekker-L.M.-Psihika-i-realnost.-Edinaya-teoriya-psihicheskih-protsessov.pdf
4. Философский энциклопедический словарь. / гл. ред.: Л.Ф. Ильичев, П.Н. Федосеев, С.М. Ковалев, В.Г. Панов. М.: Советская энциклопедия, 1983. 840 с.
5. *Aliev R.A.* Fundamentals of the Fuzzy Logic-Based Generalized Theory of Decisions. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2013, 324 p. ISBN 3642348955
6. *Keller J.M., Derong L., Fogel D.B.* Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation. IEEE Press Series on Computational Intelligence. John Wiley & Sons, 2016, 378 p. ISBN 1119214343.
7. *Vladimirov V.S. Volovich I.V., Zelenov E.I.* P-adic Analysis and Mathematical Physics. Series on Soviet and East European Mathematics (Vol 1). World Scientific, 1994, 340 p. ISBN 9814505765.
8. *Yager R.R., Liping L.* Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions. Studies in Fuzziness and Soft Computing (Vol 219). Springer, 2008, 806 p. ISBN 354044792X.
9. *Torra V., Narukawa Y., Sugeno M.* Non-Additive Measures: Theory and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing (Vol 310). Springer, 2013, 201 p. ISBN 3319031554.
10. *Bocharnikov V.P., Sveshnikov S.V.* p-Adic Representation of Subsets of a Bounded Number Set. Programming and Computer Software, 2021, Vol. 47, No. 4, pp. 225–234.
11. *Koblitz N.* p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions. Springer, Science & Business Media, 2012, 153 p. ISBN 1461211123.
12. *Katok S.* p-adic Analysis Compared with Real. Student mathematical library (Vol 37), American Mathematical Society. American Mathematical Soc., 2007, 152 p. ISBN 9780821842201.
13. *Волович И.В., Козырев С.В.* p-Адическая математическая физика: основные конструкции, применения к сложным и наноскопическим системам, Математическая физика и ее приложения. Вводные курсы. Вып. 1, Самарский гос. ун-т, Самара, 2009. http://www.mi.ras.ru/noc/irreversibility/p-adicMF1.pdf
14. *Хренников А.Ю.* Моделирование процессов мышления в p-адических системах координат. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 296 с. ISBN 5-9221-0501-9.
15. *Kozyrev S.V.* Wavelet theory as p-adic spectral analysis. Izv. RAN. Ser. Mat., 2002, Vol. 66, Iss. 2, pp. 149–158.
16. *Кононюк А.Е.* Обобщенная теория моделирования: Книга 2: Числа: количественные оценки параметров модели. Киев: “Освiта України”, 2012. 548 с. ISBN 9789667599508.
17. *Deza M-M, Deza E.* Encyclopedia of distances. Berlin, Springer, 2008. 412 p. (Russ. ed.: Deza M-M, Deza E. Entsiklopedicheskii slovar’ rasstoyanii. Moscow, Nauka Publ., 444 p).
18. *Borevich Z.I., Shafarevich I.R.* Teoriya chisel [Number theory]. Moscow, Science. The main edition of the physical and mathematical literature, 3rd ed., 1985. 504 p.
19. *Bocharnikov V., Bocharnikov I., Sveshnikov S.* Fundamentals of the systemic organization’s management. Theory and Practice. Berlin, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, 296 p. ISBN 9783659223327

FUZZY MEASURE ON p-ADIC BALLS DEFINED ON A FINITE NUMBER SET

V. P. Bocharnikov[a], S. V. Sveshnikov[a]

[a] *INEKS-FT Consulting Group, ul. Desyatinnaya 13a, Kiev, 03011 Ukraine*

The article explores an approach to constructing a fuzzy measure on p-adic balls that does not require the direct specification of the measure density. The relationships necessary for determining this measure for an arbitrary subset of a bounded numerical set, represented as a set of p-adic balls, are proven. Uniform and non-uniform fuzzy measures are considered. An algorithm for determining the fuzzy measure on p-adic balls is proposed. Examples of calculating this measure are provided.

Keywords: fuzzy measure, p-adic balls, p-adic numbers, set, ultrametric

REFERENCES

1. *Becker O.M., Karplus M.* The topology of multidimensional protein energy surfaces: theory and application to peptide structure and kinetics // Journal of Chemical Physics. 1997. V. 106. P. 1495–1517.
2. *Grabisch M., Murofushi T., Sugeno M.* Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications. Berlin, Germany, Physica-Verlag GmbH & Co, 2000, 477 p., ISBN10 3790812587
3. *Wekker L.M.* Psyche and reality: a unified theory of mental processes. — M.: Smysl, 1998. — 685 p. — Access mode: https://vshp.pro/wp-content/uploads/2020/03/Vekker-L.M.-Psihika-i-realnost.-Edinaya-teoriya-psihicheskih-protsessov.pdf
4. Philosophical encyclopedic dictionary. / Chief editor: *L. F. Ilyichev, P. N. Fedoseev, S. M. Kovalev, V. G. Panov*. — M.: Soviet Encyclopedia, 1983. — 840 p.
5. *Aliev R. A.* Fundamentals of the Fuzzy Logic-Based Generalized Theory of Decisions. Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer, 2013, 324 p. ISBN 3642348955
6. *Keller J. M., Derong L., Fogel D. B.* Fundamentals of Computational Intelligence: Neural Networks, Fuzzy Systems, and Evolutionary Computation. IEEE Press Series on Computational Intelligence. John Wiley & Sons, 2016, 378 p. ISBN 1119214343
7. *Vladimirov V. S, Volovich I. V, Zelenov E. I.* P-adic Analysis and Mathematical Physics. Series on Soviet and East European Mathematics (Vol 1). World Scientific, 1994, 340 p. ISBN 9814505765
8. *Yager R.R., Liping L.* Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions. Studies in Fuzziness and Soft Computing (Vol 219). Springer, 2008, 806 p. ISBN 354044792X
9. *Torra V., Narukawa Y., Sugeno M.* Non-Additive Measures: Theory and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Computing (Vol 310). Springer, 2013, 201 p. ISBN 3319031554
10. *Bocharnikov V. P., Sveshnikov S. V.* p-Adic Representation of Subsets of a Bounded Number Set. Programming and Computer Software, 2021, Vol. 47, No. 4, pp. 225–234.
11. *Koblitz N.* p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions. Springer, Science & Business Media, 2012, 153 p. ISBN 1461211123
12. *Katok S.* p-adic Analysis Compared with Real. Student mathematical library (Vol 37), American Mathematical Society. American Mathematical Soc., 2007, 152 p. ISBN 9780821842201
13. *Volovich I. V., Kozyrev S.* V. p-Adic mathematical physics: basic constructions, applications to complex and nanoscopic systems, Mathematical physics and its applications. Introductory courses. Issue 1, Samara State. University, Samara, 2009. http://www.mi.ras.ru/noc/irreversibility/p-adicMF1.pdf
14. *Khrennikov A. Yu.* Modeling of thinking processes in p-adic coordinate systems. — M.: FIZMATLIT, 2004. — 296 p. ISBN 5-9221-0501-9
15. *Kozyrev S. V.* Wavelet theory as p-adic spectral analysis. Izv. RAN. Ser. Mat., 2002, Vol. 66, No. 2, pp. 149–158
16. *Кононюк А. Е.* Обобщённая теория моделирования: Книга 2: Числа: количественные оценки параметров модели. Киев: «Освіта України», 2012. — 548 с. ISBN 9789667599508
17. *Deza M-M, Deza E.* Encyclopedia of distances. Berlin, Springer, 2008. 412 p. (Russ. ed.: Deza M-M, Deza E. Entsiklopedicheskii slovar' rasstoyanii. Moscow, Nauka Publ., 444 p)
18. *Borevich Z.I., Shafarevich I.R.* Teoriya chisel [Number theory]. Moscow, Science. The main edition of the physical and mathematical literature, 3rd ed., 1985. 504 p.
19. *Bocharnikov V., Bocharnikov I., Sveshnikov S.* Fundamentals of the systemic organization's management. Theory and Practice. Berlin, LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, 296 p. ISBN 9783659223327